



UNIVERSIDADE DA INTEGRAÇÃO INTERNACIONAL DA LUSOFONIA
AFRO-BRASILEIRA
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL
EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL

DANIEL ANGELO DOS SANTOS RIBEIRO

UM ESTUDO DAS CÔNICAS:
Propriedades geométricas e classificação

REDENÇÃO

2025

DANIEL ANGELO DOS SANTOS RIBEIRO

UM ESTUDO DAS CÔNICAS:
Propriedades geométricas e classificação

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática em Rede Nacional da Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro Brasileira, como parte dos requisitos necessários para a obtenção do título de mestre em Matemática. Área de concentração: Matemática na Educação Básica.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva

REDENÇÃO

2025

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira
Sistema de Bibliotecas da UNILAB
Catalogação de Publicação na Fonte.

Ribeiro, Daniel Angelo Dos Santos.

R484e

Um estudo das cônicas: propriedades geométricas e classificação
/ Daniel Angelo Dos Santos Ribeiro. - Redenção, 2025.
88f: il.

Dissertação - Curso de , Mestrado Profissional Em Matemática Em
Rede Nacional, Universidade da Integração Internacional da
Lusofonia Afro-Brasileira, Redenção, 2025.

Orientador: Prof. Dr. Joserlan Perote Da Silva.

1. Cônicas - Figuras geométricas. 2. Classificação. 3.
Propriedades. I. Título

CE/UF/BSCA

CDD 516.15

DANIEL ANGELO DOS SANTOS RIBEIRO

UM ESTUDO DAS CÔNICAS:
Propriedades geométricas e classificação

Dissertação apresentada como requisito para obtenção do título de Mestre em Matemática, na Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira, UNILAB - Campus Auras.

Aprovada em: 03/07/2025.

BANCA EXAMINADORA

Joserlan Perote da Silva

Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva (Orientador)

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

Wesley Marinho Lozório

Prof. Dr. Wesley Marinho Lozório

Universidade da Integração Internacional da Lusofonia Afro-Brasileira (UNILAB)

José Alberto Duarte Maia

Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia

Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho a todas as pessoas que
contribuíram direta ou indiretamente com a
sua realização.

AGRADECIMENTOS

Àgradeço, primeiramente, a Deus, por me conceder forças e sabedoria para trilhar este caminho até o fim.

A minha mãe por ter se sacrificado tanto em vida para que eu pudesse estudar.

À minha esposa e aos meus filhos, pela paciência e compreensão demonstrados durante todo o período em que me dediquei aos estudos.

A CAPES, pelo apoio financeiro com a manutenção da bolsa de auxílio.

Ao Prof. Dr. Joserlan Perote da Silva, pela excelente orientação.

Aos professores participantes da banca examinadora Prof. Dr. Wesley Marinho Lozório e Prof. Dr. José Alberto Duarte Maia pelo tempo, pelas valiosas colaborações e sugestões.

Aos colegas da turma de mestrado, pelas reflexões, críticas e sugestões.

"As matemáticas têm invenções sutilíssimas e servirão de muito, não apenas para satisfazer os curiosos como para tornar mais fáceis todas as artes e diminuir o trabalhos dos homens - René Descartes."

RESUMO

Este trabalho pretende mostrar definições, elementos geométricos e modos mais precisos de classificação de elipse, parábola e hipérbole. No primeiro capítulo construímos o plano cartesiano, onde mostramos as isometrias que iremos trabalhar. Uma revisão histórica de Menecmo até as esferas de Dandelin foi realizada para uma visualização completa das cônicas e de seus principais elementos. Do segundo ao quarto capítulos, mostramos definições, propriedades geométricas, forma polar, Latus rectum, propriedades ópticas e algumas aplicações das cônicas estudadas. No quinto capítulo, dedicamo-nos a mostrar o surgimento da forma completa da equação quadrática e como classificar de modo detalhado cada curva conforme os coeficientes iniciais. Demonstramos a invariância por rotação e translação do discriminante e do indicador de degenerescência, pois é essencial para utilizar as informações contidas na forma incompleta da equação quadrática encontrada nos capítulos anteriores. Desenvolvemos um parâmetro extra para completar os casos de classificação. O resultado foi a construção de tabelas que relacionam os coeficientes por meio de parâmetros com o tipo específico de cada cônica.

Palavras-chave: Cônicas. Classificação. Propriedades.

ABSTRACT

This work aims to present definitions, geometric elements, and more precise classification methods for ellipses, parabolas, and hyperbolas. In the first chapter, we construct the Cartesian plane, where we demonstrate the isometries we will work with. A historical review, from Menecmus to Dandelin spheres, was performed for a complete overview of conics and their main elements. From the second to fourth chapters, we present definitions, geometric properties, polar form, Latus rectum, optical properties, and some applications of the conics studied. In the fifth chapter, we dedicate ourselves to demonstrating the emergence of the complete form of the quadratic equation and how to classify each curve in detail according to its initial coefficients. We demonstrate the rotation and translation invariance of the discriminant and the degeneracy indicator, as this is essential for utilizing the information contained in the incomplete form of the quadratic equation found in the previous chapters. We develop an additional parameter to complete the classification cases. The result is the construction of tables that relate the coefficients, using parameters, to the specific type of each conic.

Keywords: Conic. Classification. Properties.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Distância na reta	16
Figura 2 – Quadrantes	17
Figura 3 – Distância entre dois pontos	18
Figura 4 – Coordenadas polares	19
Figura 5 – Mediatriz	21
Figura 6 – Circunferência de centro A e raio r	21
Figura 7 – Seções meridianas das cônicas	22
Figura 8 – Seções cônicas não degeneradas	23
Figura 9 – Seções cônicas degeneradas	23
Figura 10 – Esferas de Dandelin - Elipse	24
Figura 11 – Esferas de Dandelin - Hipérbole	25
Figura 12 – Esferas de Dandelin - Parábola	25
Figura 13 – Elementos da elipse	27
Figura 14 – Condição de existência - elipse	28
Figura 15 – Ponto interno da elipse	29
Figura 16 – Ponto externo da elipse	29
Figura 17 – Região focal - Elipse	32
Figura 18 – Região não focal - Elipse	32
Figura 19 – Excetricidade da elipse	33
Figura 20 – Deformação da elipse	33
Figura 21 – Equação polar da elipse	35
Figura 22 – Latus Rectum - Elipse	37
Figura 23 – Traçado da elipse	37
Figura 24 – Princípio de reflexão da elipse	38
Figura 25 – Poncelet - Elipse	39
Figura 26 – Refletor elíptico	40
Figura 27 – Engrenagem elíptica	40
Figura 28 – Elementos da hipérbole	41
Figura 29 – Condição de existência da hipérbole	42
Figura 30 – Ponto interno da hipérbole	43
Figura 31 – Ponto externo da hipérbole	43
Figura 32 – Região focal - Hipérbole	46
Figura 33 – Região não focal - Hipérbole	46
Figura 34 – Excentricidade da hiperbole	47
Figura 35 – Deformação da hipérbole	48
Figura 36 – Equação polar da hipérbole	49

Figura 37 – Latus rectum hipérbole	51
Figura 38 – Reflexão da hipérbole	52
Figura 39 – Poncelet - Hipérbole	53
Figura 40 – Torre hiperbólica	54
Figura 41 – Órbita hiperbólica	54
Figura 42 – Elementos da parábola	55
Figura 43 – Ponto interno da parábola	56
Figura 44 – Ponto externo da parábola	56
Figura 45 – 1º caso da forma canônica da parábola	57
Figura 46 – 2º caso da forma canônica da parábola	58
Figura 47 – 3º caso da forma canônica da parábola	58
Figura 48 – 4º caso da forma canônica da parábola	59
Figura 49 – Região focal - Parábola	60
Figura 50 – Região não focal - Parábola	61
Figura 51 – Equação polar da parábola	61
Figura 52 – Latus rectum - parábola	62
Figura 53 – Reflexão da parábola	63
Figura 54 – Poncelet - Parábola	64
Figura 55 – Antena parabólica	65
Figura 56 – Fogão solar parabólico	65
Figura 57 – Equação geral	66

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Tabela de classificação reduzida de cônicas não-degeneradas	72
Tabela 2 – Tabela de classificação reduzida de cônicas degeneradas	73
Tabela 3 – Tabela de classificação geral de cônicas não-degeneradas	82
Tabela 4 – Tabela de classificação geral de cônicas degeneradas	83

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
2	PRELIMINARES	15
2.1	COORDENADAS E DISTÂNCIA	15
2.2	TRANSFORMAÇÕES NO PLANO	19
2.3	LUGARES GEOMÉTRICOS	21
2.4	SEÇÕES CÔNICAS	22
3	ELIPSE	27
3.1	DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS	27
3.2	PROPRIEDADES ÓPTICAS	38
3.3	APLICAÇÕES	39
4	HIPÉRBOLE	41
4.1	DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES GEOMÉTRICOS	41
4.2	PROPRIEDADES ÓPTICAS	52
4.3	APLICAÇÕES	54
5	PARÁBOLA	55
5.1	DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES	55
5.2	PROPRIEDADES ÓPTICAS	63
5.3	APLICAÇÕES	65
6	CLASSIFICAÇÃO DE CÔNICAS	66
6.1	CLASSIFICAÇÃO POR COEFICIENTES	66
6.2	CLASSIFICAÇÃO DE CÔNICAS COM $B=0$	68
6.3	INVARIANTE ALGEBRICO E INDICADOR DE DEGENERESCÊNCIA	73
7	CONCLUSÃO	84
	REFERÊNCIAS	86

1 INTRODUÇÃO

A geometria analítica possui um papel central no desenvolvimento da álgebra e da geometria elementar, pois permite estudar ambas simultaneamente e logo dá uma visão maior na resolução de seus problemas. Ao traduzir objetos geométricos em equações ou resolver problemas algébricos utilizando o plano cartesiano, estudantes de matemática conseguem transportar problemas difíceis de determinada área, mas que em outra têm fácil resolução.

A grande motivação deste trabalho vem da esplêndida disciplina de geometria analítica, ministrada no curso de mestrado do Profmat. Nesta cadeira, estudamos todos os aspectos da geometria no plano cartesiano com ênfase no estudo das cônicas. Em determinado momento, o professor desafiou a turma a classificar as cônicas utilizando o discriminante da equação quadrática de forma geral, mas sem detalhar muito a forma de distinguir as cônicas verdadeiras de suas degenerações. Meu instinto de criança curiosa tentou de inúmeras formas encontrar padrões para distinguir as curvas verdadeiras de suas degenerações e com isso comecei a pesquisar sobre o assunto e tentar recriar uma tabela de classificação de cônicas mais detalhada e que utilizasse apenas os coeficientes da equação quadrática inicial para a identificação das curvas.

No primeiro capítulo construímos o plano cartesiano, pois este é nosso principal local de trabalho, apesar de que algumas propriedades das curvas estudadas são resolvidas com base na geometria plana elementar. Garantimos mediante isometrias que as curvas estudadas mantenham as distâncias ao serem transladadas ou rotacionadas. Na seção de lugares geométricos e seções cônicas, desenvolvemos a parte histórica das cônicas desde Menecmo até as famosas esferas de Dandelin e demos uma definição geral sobre as curvas a serem trabalhadas nos capítulos posteriores.

No começo do segundo capítulo, fizemos um estudo mais completo sobre a elipse, onde demos uma definição mais detalhada sobre a curva e mostramos seus principais elementos. Trabalhamos com a ideia de ponto interior e exterior, focando em dar um maior entendimento às demonstrações das propriedades ópticas. A equação canônica tem um papel de destaque neste momento, pois a partir dela conseguimos provar a simetria e encontrar a forma quadrática da curva elíptica. Como a curva elíptica é fechada, utilizamos a simetria e algumas ferramentas de cálculo para determinar a sua área. Calculamos a excentricidade conforme a definição dada no capítulo anterior, onde relacionamos os valores encontrados com possíveis deformações da curva. As formas paramétrica e polar foram utilizadas no traçado da elipse e no cálculo da corda focal mínima, respectivamente. Ao final deste capítulo, provamos o princípio de reflexão e o teorema de Poncelet relativo à elipse e também mostramos algumas aplicações.

O terceiro capítulo é dedicado a um estudo mais aprofundado da hipérbole, onde segue a mesma linha do capítulo anterior no quesito de definições e posições relativas

de ponto e curva. As ferramentas de cálculo são utilizadas para encontrar as equações das assíntotas da hipérbole. A forma canônica da hipérbole segue os mesmos passos do caso elipse, onde a utilizamos para encontrar a simetria e a equação quadrática da curva. Diretrizes, excentricidade e o comprimento da corda focal mínima também estão presentes nas curvas hiperbólicas. Deixamos para o final do capítulo a propriedade de reflexão, o teorema de Poncelet para o caso da hipérbole e algumas aplicações.

As propriedades sobre parábola estão no quarto capítulo, onde podemos perceber que a excentricidade e a diretriz aparecem de forma mais simples do que nos capítulos anteriores. A simetria da parábola é mais restrita, tendo apenas um eixo. A forma canônica é mostrada de quatro formas para um melhor entendimento da curva. Seguindo os resultados anteriores, utilizamos a forma polar para calcular a Latus rectum ou também conhecida como corda focal mínima. O teorema de Poncelet e o princípio de reflexão para parábola ficaram para a parte final, com suas devidas aplicações.

Os teoremas sobre classificação de cônicas ficaram para o nosso quinto capítulo, onde encontramos a forma completa da equação quadrática. Primeiramente, mostramos os principais resultados para a forma quadrática com $B = 0$, onde encontramos casos particulares para o discriminante e indicador de degenerescência. Ao estudar a forma quadrática completa com $B \neq 0$, através de uma rotação eixos, chegamos à forma de $B = 0$. Demonstramos a invariância por rotação e translação do discriminante e indicador de degenerescência entre as duas formas, onde podemos aproveitar os resultados de classificação já obtidos. O caso mais emblemático, surge quando Δ e δ são iguais a zero, onde utilizamos um novo parâmetro de classificação para essa situação em específico.

2 PRELIMINARES

Neste capítulo desenvolveremos algumas ferramentas necessárias para um melhor entendimento sobre o estudo das propriedades geométricas, ópticas e os teoremas de classificação das cônicas. Construiremos a noção de plano cartesiano seguindo os passos de Lima (2002) e mostraremos as principais transformações geométricas que ocorrem em nossos objetos de estudo.

2.1 COORDENADAS E DISTÂNCIA

Como alguns dos nossos principais resultados se baseiam na noção de distância entre objetos geométricos, definiremos a métrica com a qual iremos trabalhar.

Definição 2.1. Denominaremos a distância no plano entre os pontos A e B ou comprimento do segmento AB por $d(A, B)$ ou \overline{AB} , respectivamente, onde tal satisfaz as seguintes propriedades:

- I. $d(A, B) \geq 0$;
- II. $d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;
- III. $d(A, B) = d(B, A)$;
- IV. $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$ (desigualdade triangular);
- V. $d(A, B) = d(A, C) + d(C, B) \Leftrightarrow A, B$ e C são colineares e C está entre A e B .

Definição 2.2. Uma reta diz-se orientada quando sobre ela se escolheu um sentido de percurso, chamado positivo; o sentido inverso chama-se negativo. Em uma reta orientada, dizemos que Y está à direita de X e logo X está à esquerda de Y , quando o sentido de percurso de Y para X é positivo e de X para Y será negativo.

Podemos fixar na reta orientada um ponto O que chamaremos de origem, e assim esta reta será chamada de eixo. Sendo o eixo E com origem O , podemos colocá-lo em correspondência biunívoca com o conjunto dos números reais, onde o número zero corresponderá à origem. Os pontos à direita da origem correspondem aos números positivos e à esquerda os números negativos. Se o ponto X que corresponde ao número real x em E está à direita da origem, teremos que $d(O, X) = x$ e se estiver à esquerda, $-d(O, X) = x$.

Proposição 2.1. *Dados os pontos X e Y sobre o eixo E , se suas coordenadas são x e y respectivamente, então a distância entre X e Y é*

$$d(X, Y) = |x - y| = |y - x|,$$

isto é, tem-se $d(X, Y) = x - y$ se $x \geq y$ e $d(X, Y) = y - x$ se $y \geq x$.

Demonstração: Para provar tal afirmação, usaremos as propriedades *I, II* e *V* da Definição 2.1. Se X e Y são coincidentes, ou seja, $X = Y$, não há o que se provar. Para $X \neq Y$, sem perda de generalidade, podemos considerar que X esteja à esquerda de Y , ou seja, que $x < y$. Com isso, teremos que considerar 3 casos como mostra a figura 1:

1º caso : X e Y estão à direita da origem, ou seja, $0 < x < y$.

Como X e Y estão à direita da origem, temos que $d(O, X) = x$ e $d(O, Y) = y$, então

$$d(O, X) + d(X, Y) = d(O, Y)$$

e portanto

$$d(X, Y) = d(O, Y) - d(O, X) = y - x = |y - x|.$$

2º caso : X e Y estão à esquerda da origem, ou seja, $x < y < 0$.

Como X e Y estão à esquerda da origem, temos que $d(O, X) = -x$ e $d(O, Y) = -y$, então

$$d(O, Y) + d(Y, X) = d(O, X)$$

e portanto

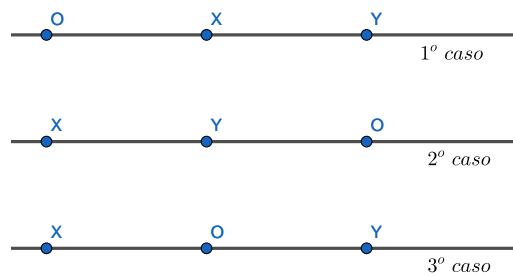
$$d(X, Y) = d(Y, X) = d(O, X) - d(O, Y) = -x + y = y - x = |y - x|.$$

3º caso : X e Y estão em lados oposto em relação a origem, então $x < 0 < y$.

Como X está à esquerda da origem e Y à direita, temos que $d(O, X) = -x$ e $d(O, Y) = y$, então

$$d(X, Y) = d(X, O) + d(O, Y) = -x + y = |y - x|.$$

Figura 1 – Distância na reta



Fonte: Próprio autor (2025).

Se X estiver à direita de Y , podemos demonstrar de forma análoga. ■

Uma das maiores invenções já feitas foi o plano cartesiano, na qual o matemático René Descartes revolucionou a forma de ver a geometria. De acordo com Roque(2012)

Para Descartes, a extensão deve ser conhecida por meio de relações como a proporção, e o objetivo da nova geometria seria estudar figuras usando proporções. Ao traduzir os problemas geométricos em linguagem algébrica, ele visava compreender melhor as relações entre as grandezas do problema [...](Roque, 2012, p. 321).

Construiremos o plano Cartesiano e mostraremos seus principais elementos, pois o nosso trabalho depende da precisão e simplicidade que esta ferramenta nos dá em muitos resultados.

Definição 2.3. O conjunto formado por todos os pares ordenados (x, y) onde x e y são números reais é chamado \mathbb{R}^2 .

Definição 2.4. Um sistema de eixos ortogonais num plano Π é um par de eixos OX e OY , tomados em Π , que são perpendiculares e têm a mesma origem O . Diz-se que o eixo OX é horizontal e o eixo OY é vertical.

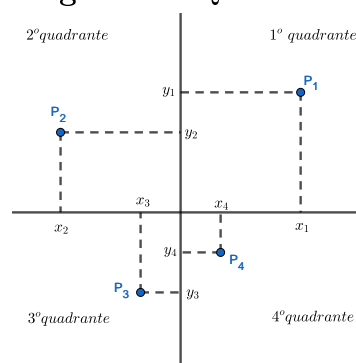
Podemos colocar o plano Π munido de um sistema de eixos ortogonais em correspondência com o conjunto \mathbb{R}^2 da seguinte forma: dado um ponto P do plano, traçaremos por ele retas paralelas aos eixos OX e OY . Essas retas paralelas interceptam os eixos ortogonais OY e OX em dois pontos, as quais as coordenadas são x e y , respectivamente. O ponto P do plano Π relaciona-se com o par ordenado (x, y) pertencente ao conjunto \mathbb{R}^2 . Reciprocamente, para cada par ordenado (x, y) pertencente a \mathbb{R}^2 corresponde a um ponto $P \in \Pi$, onde teremos que a interseção da paralela a OY construída a partir do ponto de coordenada x com a paralela a OX construída com o ponto de coordenada y pertencente a OY . Podemos dizer que x e y são denominadas as coordenadas cartesianas do ponto P relativo ao sistema de eixos ortogonais fixados. Chamaremos x de abscissa e y ordenada de P .

Os eixos ortogonais dividem o plano Π em quatro regiões denominadas quadrantes, onde:

- O primeiro tem coordenadas $x > 0$ e $y > 0$, localizando-se acima do eixo x , no lado direito do eixo y .
- O segundo tem coordenadas $x < 0$ e $y > 0$, localizando-se acima do eixo x , no lado esquerdo do eixo y .
- O terceiro tem coordenadas $x < 0$ e $y < 0$, localizando-se abaixo do eixo x , no lado esquerdo do eixo y .
- O quarto tem coordenadas $x > 0$ e $y < 0$, localizando-se abaixo do eixo x , no lado direito do eixo y .

Os pontos pertencentes ao eixo OX que chamamos de abscissas têm coordenadas $(x, 0)$ e no eixo das ordenadas OY são da forma $(0, y)$. A origem dos eixos, o qual é o ponto O , tem coordenadas $(0, 0)$. Os eixos ortogonais não fazem parte dos quadrantes, sendo linhas limites para essas regiões conforme a figura 2.

Figura 2 – Quadrantes



Fonte: Próprio autor (2025).

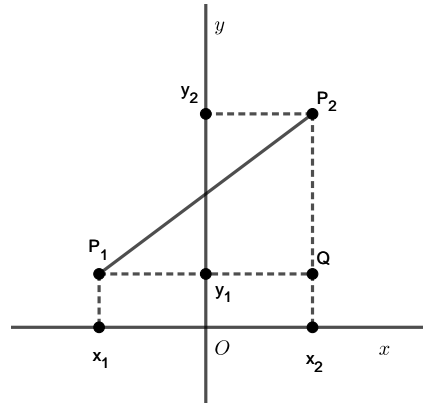
Um dos principais resultados para o desenvolvimento do nosso trabalho, a fórmula a seguir é bem conhecida na geometria analítica e também em outras áreas da matemática.

Proposição 2.2. *Dados os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$, a distância entre ambos*

é dada por $d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

Demonstração: Inicialmente introduziremos um novo ponto $Q = (x_2, y_1)$. Como P_1 e Q têm a mesma ordenada, temos que a $d(P_1, Q) = |x_1 - x_2|$ e também será paralelo a OX . Como P_2 e Q tem a mesma abscissa, teremos que $d(P_2, Q) = |y_1 - y_2|$ e será paralelo a OY . Como P_1Q e P_2Q são paralelos a OX e OY respectivamente, então são perpendiculares e formam o triângulo retângulo $\triangle P_1QP_2$ como mostrado na figura 3.

Figura 3 – Distância entre dois pontos



Fonte: Próprio autor (2025).

Pelo teorema de Pitágoras, teremos que

$$(d(P_1, P_2))^2 = |x_1 - x_2|^2 + |y_1 - y_2|^2.$$

Logo,

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \quad \blacksquare$$

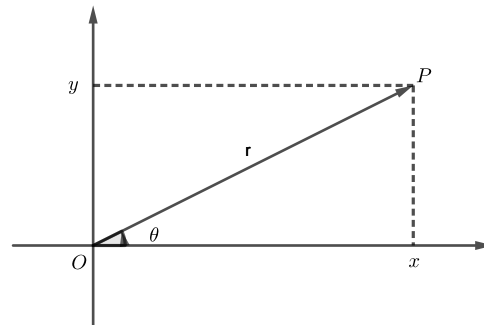
Podemos também ter sistemas de eixos não ortogonais que são bastante úteis para descrever equações de certas curvas. As próximas coordenadas não ortogonais serão apresentadas de forma sucinta, mas são de suma importância para estudarmos as famosas Latus Rectum das cônicas. Caso o leitor queira um aprofundamento de mais aplicações sobre tais coordenadas, aconselhamos Ávila (1978).

Coordenadas polares

Dado um ponto $P = (x, y)$, as coordenadas polares deste serão a distância $r = OP \geq 0$ e o ângulo θ formado pelo raio OP e o eixo OX . De acordo com a figura 4, a distância r , ou raio polar e o ângulo polar θ ficam determinados unicamente para cada ponto P do plano. De fato, se θ_0 é uma determinação desse ângulo, então qualquer outro ângulo θ que se diferencie de θ_0 por um múltiplo inteiro de 2π é uma determinação válida,

$$\theta = \theta_0 + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Em particular, a origem tem raio polar nulo e ângulo indeterminado. Reciprocamente, dado um par qualquer de números (r, θ) , com $r \geq 0$, podemos perceber que existe um único ponto com as coordenadas polares (r, θ) .

Figura 4 – Coordenadas polares

Fonte: Próprio autor (2025).

Podemos rescrever as coordenadas cartesianas em polares utilizando as seguintes equações:

$$x = r \cos \theta \quad \text{e} \quad y = r \sin \theta.$$

2.2 TRANSFORMAÇÕES NO PLANO

Os próximos resultados foram obtidos com pesquisas em Azevedo (2013) e Lima (2002), onde podemos garantir as isometrias das estruturas ao sofrerem certas transformações que estudaremos a seguir.

Definição 2.5. Uma transformação no plano Π é uma função $T : \Pi \rightarrow \Pi$, isto é, uma relação que associa cada ponto P do plano a outro ponto $P_1 = T(P)$ do plano, chamado sua imagem por T .

Definição 2.6. Uma transformação $T : \Pi \rightarrow \Pi$ chama-se bijetiva, ou uma bijeção, quando é simultaneamente injetiva e sobrejetiva. Isto significa que para todo ponto P_1 em Π existe um único ponto P em Π tal que $T(P) = P_1$.

Definição 2.7. Uma isometria do plano Π é uma transformação $T : \Pi \rightarrow \Pi$ que preserva distâncias. Logo T é uma isometria ao ter $d(T(P), T(Q)) = d(P, Q)$ para quaisquer pontos P, Q no plano Π .

Proposição 2.3. *Toda isometria é injetiva.*

Demonstração: Dados P e Q pontos do plano. Sendo $T(P) = T(Q)$ então $d(P, Q) = d(T(P), T(Q)) = 0$, Logo $P = Q$. ■

Os dois próximos resultados nos dão base para identificar as curvas que serão estudadas no \mathbb{R}^2 , pois estas podem estar deslocadas da origem ou até mesmo rotacionadas, o que dificulta a visualização de suas características.

Translação

Sendo o sistema de eixos coordenados OXY e (a, b) as coordenadas de um ponto neste sistema. Podemos considerar a transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, que associa cada (x, y) a (x', y') , através da relação $(x', y') = (x - a, y - b)$, onde esta será chamada de

translação. Esta transformação é bijetiva.

Proposição 2.4. *Toda translação é uma isometria.*

Demonstração: De fato, sejam $X = (x, y)$ e $Y = (z, w)$ e $X' = (x', y')$ e $Y' = (z', w')$ os pontos correspondentes. Temos que $x' = x - a, y' = y - b, z' = z - a$ e $w' = w - b$.

Assim, teremos que:

$$\begin{aligned} d(X', Y') &= \sqrt{(x' - z')^2 + (y' - w')^2} \\ &= \sqrt{((x - a) - (z - a))^2 + ((y - b) - (w - b))^2} \\ &= \sqrt{(x - z)^2 + (y - w)^2} \\ &= d(X, Y). \end{aligned}$$

A substituição $x' = x - a$ e $y' = y - b$ é uma mudança de coordenadas que será chamada de translação de eixos. ■

Rotação

Seja XY um sistema de eixos coordenados. Seja a matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, onde suas colunas são vetores do \mathbb{R}^2 unitários e perpendiculares. A matriz A é dita ortogonal e goza das seguintes propriedades $A^t A = I_2$, então A^t é a inversa à esquerda de A , teremos que $A^t = A^{-1}$. Logo, as linhas de A são vetores perpendiculares e unitários. Podemos considerar um novo sistema de coordenadas $X'Y'$ onde este será dado por: $x' = ax + by$ e $y' = cx + dy$. Chamaremos A de matriz de mudança de base das coordenadas (x, y) para as coordenadas (x', y') . Analisando matricialmente, temos que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, onde multiplicando à esquerda pela transposta de A , ficaremos com $A^t \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, que equivale $x = ax' + cy'$ e $y = dx' + dy'$. Estas equações relacionam um ponto no sistema inicial a partir das coordenadas do novo sistema. Chamaremos a transposta de A de matriz mudança de base das coordenadas (x', y') para as coordenadas (x, y) .

Definição 2.8. A transformação $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ que associa cada (x, y) a $(x', y') = (ax + by, cx + dy)$, será chamada de rotação.

Proposição 2.5. *Toda rotação é uma isometria.*

Demonstração: De fato, sendo $X = (x, y)$ e $Y = (z, w)$ e $X' = (x', y')$ e $Y' = (z', w')$ os pontos correspondentes. Logo, $x' = ax + by, y' = cx + dy, z' = az + bw$ e $w' = cz + dw$. Segue que,

$$\begin{aligned} d(X', Y') &= \sqrt{(x' - z')^2 + (y' - w')^2} \\ &= \sqrt{((ax + by) - (az + bw))^2 + ((cx + dy) - (cz + dw))^2}. \end{aligned}$$

Desenvolvendo os quadrados temos que $(a^2 + c^2)(x - z)^2 + (b^2 + d^2)(y - w)^2 + 2(ab + cd)(x - z)(y - w)$. Como as colunas da matriz A são perpendiculares e unitárias, teremos

que $(a^2 + c^2) = b^2 + d^2 = 1$ e $ab + cd = 0$. Então,

$$d(X', Y') = \sqrt{(x - z)^2 + (y - w)^2} = d(X, Y). \quad \blacksquare$$

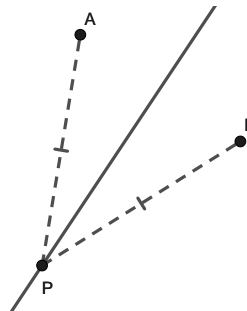
2.3 LUGARES GEOMÉTRICOS

Nossos principais objetos de estudo são definidos por alguma propriedade específica, de onde deduziremos determinadas características, logo devemos rever as definições a seguir para ter uma ideia de como trabalhar e demonstrar suas propriedades.

Definição 2.9. Lugar geométrico é um conjunto de pontos que obedecem a certa propriedade comum a todos.

Exemplo 2.1. Mediatriz é o conjunto de pontos que estão equidistantes a dois pontos distintos, como mostrado na figura 5.

Figura 5 – Mediatriz



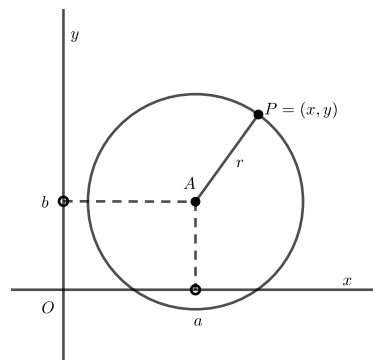
Fonte: Próprio autor (2025).

O próximo lugar geométrico é de suma importância para a construção e compreensão das cônicas e logo daremos uma definição mais detalhada.

Definição 2.10. Dados o ponto $A = (a, b)$ e o número real $r > 0$, chamamos de circunferência C de centro A e raio r o conjunto de pontos situados a uma distância r do ponto O , como vemos na figura 6. Logo o ponto $P = (x, y) \in C$, se, e somente se, $d(A, P) = r$. Pela fórmula da distância entre dois pontos no plano, podemos escrever

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r\}.$$

Figura 6 – Circunferência de centro A e raio r



Fonte: Próprio autor (2025).

Quando o ponto A coincide com a origem do plano cartesiano, a equação da circunferência é $x^2 + y^2 = r^2$.

2.4 SEÇÕES CÔNICAS

Os estudos das cônicas são remotos da Grécia antiga, onde certa lenda conta da necessidade religiosa de duplicar o altar do Deus Apolo e daí surgiu o famoso problema da duplicação do cubo. De acordo com Roque (2012):

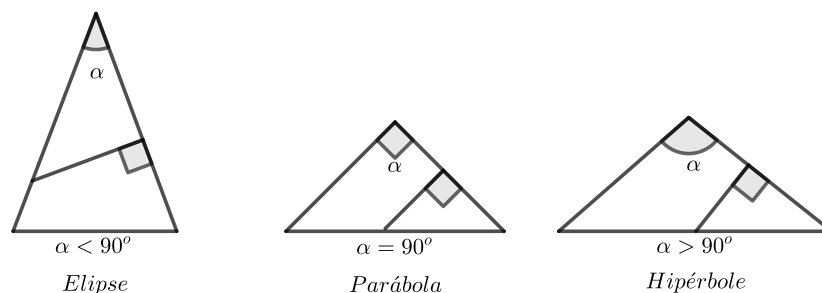
Péricles teria morrido de peste juntamente com um quarto da população de Atenas. Consternados, os atenienses consultaram o oráculo de Apolo, em Delos, para saber como enfrentar a doença. A resposta foi que o altar de Apolo, que possuía o formato de um cubo, deveria ser duplicado [...] (Roque, 2012, p.156).

Com este problema em mão, Menecmo (350 a.C) que foi aluno de Eudoxo, descobriu as três curvas cônicas. De acordo com Roque (2012):

O seu conhecimento de teoria das razões e proporções permitia concluir, sem usar equações, que o ponto que satisfaz o problema das meias proporcionais é a interseção de duas cônicas, uma parábola e uma hipérbole, que atualmente seriam dadas, respectivamente, pelas equações $y^2 = bx$ e $xy = ab$ (Obtidas diretamente das proporções $a::x::x::y::y::b$) [...] (Roque, 2012, p.156).

Os estudos de Menecmo foram limitados, pois consistiam em fazer a interseção do cone circular reto com um plano que era perpendicular a uma geratriz. Onde, para obter cônicas diferentes, ele variava o ângulo entre as geratrizes opostas. O problema deste método é a impossibilidade da visualização completa dos ramos da hipérbole, conforme a figura 7.

Figura 7 – Seções meridianas das cônicas



Fonte: Próprio autor (2025).

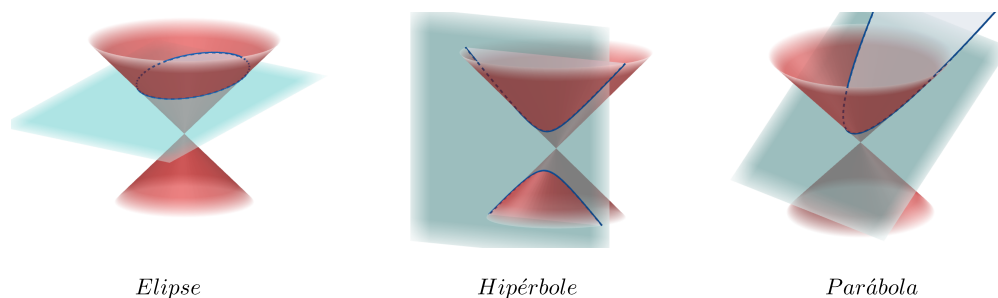
Apesar de algumas descobertas no estudo das cônicas, o matemático grego que obteve mais êxito foi Apolônio de Pergas, onde de acordo com Boyer (1974):

Antes do tempo de Apolônio, a elipse, a parábola e a hipérbole eram obtidas como seções de três tipos bem diferentes de cone circular reto, conforme o ângulo no vértice fosse agudo, reto ou obtuso. Apolônio, aparentemente pela primeira vez, mostrou sistematicamente que não é necessário tomar seções perpendiculares a um elemento do cone e que

de um único cone podem ser obtidas todas as três espécies de secções cônicas, simplesmente variando a inclinação do plano de secção. Esse foi um passo importante para ligar os três tipos de curvas. Uma segunda generalização importante ocorreu quando Apolônio demonstrou que o cone não precisa ser reto — isto é, um cone cujo eixo é perpendicular à base circular — mas pode também ser um cone circular oblíquo ou escaleno. Se Eutócio, ao comentar as Cônicas, estava bem informado, podemos inferir que Apolônio foi o primeiro geômetra a mostrar que as propriedades das curvas não são diferentes conforme sejam cortadas de cones oblíquos ou retos. Finalmente, Apolônio trouxe as curvas antigas mais para perto do ponto de vista moderno substituindo o cone de uma só folha (como um cone de sorvete) por um duplo (semelhante a dois cones de sorvete colocados em sentidos opostos e indefinidamente estendidos, de modo que seus vértices coincidam e os eixos estejam sobre uma mesma reta)[...](Boyer, 1974, p.107).

A introdução do cone de duas folhas por parte de Apolônio foi um avanço para a visualização da hipérbole, pois naquele momento dava uma visualização completa desta curva, como veremos a seguir nas figuras 8 e 9:

Figura 8 – Seções cônicas não degeneradas



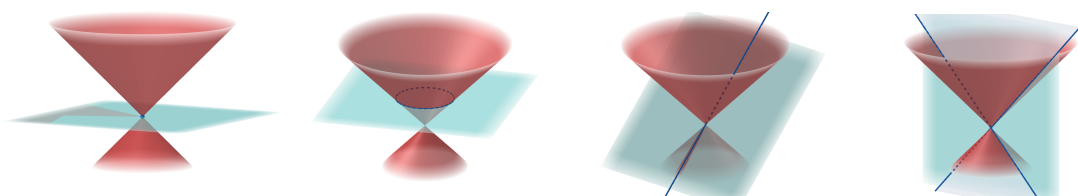
Elipse

Hipérbole

Parábola

Fonte: Próprio autor (2025).

Figura 9 – Seções cônicas degeneradas



Ponto

Circunferência

Reta

Retas concorrentes

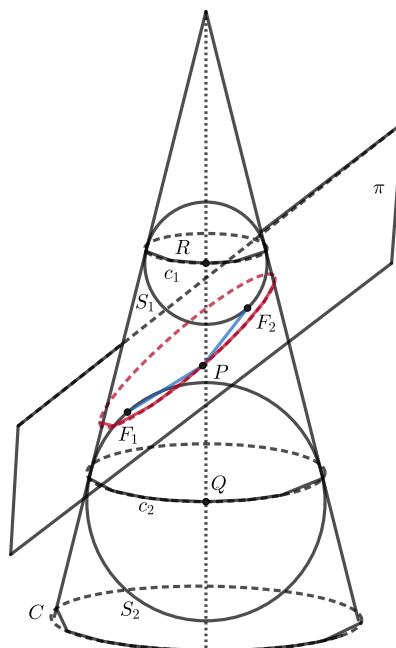
Fonte: Próprio autor (2025).

Depois da obra de Apolônio, as cônicas não tiveram avanços no quesito de definições mais precisas. Foi a partir dos estudos do matemático belga Germinal Pierre Dandelin(1794-1847) que foram apresentadas demonstrações simples e claras para as ideias

de Apolônio. Com a introdução das suas famosas esferas, Dandelin e seu colega Adolphe Quetelet que também era belga, demonstraram os famosos teoremas belgas para cônicas. O único caso não demonstrado pela dupla belga foi o da parábola, onde o matemático inglês Pierce Morton provou utilizando um raciocínio semelhante ao de Dandelin. Para um estudo mais aprofundado sobre as esferas de Dandelin aconselhamos Monteiro (2014).

Proposição 2.6. *Sejam um cone circular reto e um plano que o intersecta de tal modo que existam duas esferas que tangenciam simultaneamente o plano. Se F_1 e F_2 são os pontos de interseção das esferas com o plano, então qualquer ponto P da interseção do cone com o plano é tal que $\overline{PF_1} + \overline{PF_2}$ é constante, ou seja, não depende de P .*

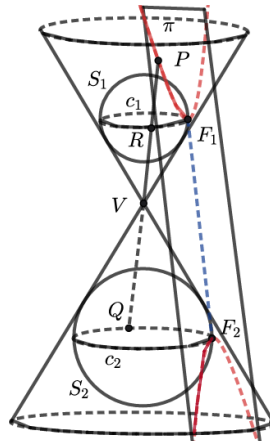
Figura 10 – Esferas de Dandelin - Elipse



Fonte: Próprio autor (2025).

Demonstração: Sendo um ponto P localizado na interseção do plano com o cone. Traçando a geratriz do cone C que passa por P , onde está interseccionando as duas esferas em R e Q . Sejam F_1 e F_2 os pontos de tangência do plano com as esferas S_1 e S_2 , respectivamente. Utilizando o famoso Teorema do Bico, onde afirma que dois segmentos com extremidades num mesmo ponto externo à circunferência e as demais extremidades tangentes a ela são congruentes. Como mostrado na figura 10, temos que $\overline{PF_1} = \overline{PQ}$ e $\overline{PF_2} = \overline{PR}$. Logo $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PQ} + \overline{PR} = \overline{QR}$. ■

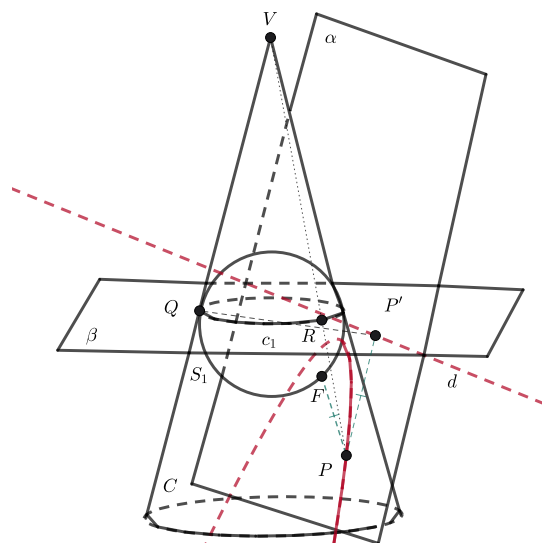
Proposição 2.7. *Sejam um cone circular reto e um plano que o intersecta de tal modo que existam duas esferas tangenciam simultaneamente o plano e o cone. Se F_1 e F_2 são os pontos de interseção das esferas com o plano, então qualquer ponto P da interseção do cone com o plano é tal que $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}|$ é constante, ou seja, não depende de P .*

Figura 11 – Esferas de Dandelin - Hipérbole

Fonte: Próprio autor (2025).

Demonstração: No caso da hipérbole, utilizaremos um bicone com duas esferas que tangenciam internamente cada folha. Sendo P um ponto qualquer na interseção do plano com o cone. Traçando a geratriz do cone passando por P , onde esta intersecciona S_1 em R e S_2 em Q , pois as esferas são tangentes ao bicone. Seja \overline{RQ} o comprimento do segmento entre c_1 e c_2 que passa por V . Utilizando novamente o teorema do bico e de acordo com a figura 11, teremos que $\overline{PF_1} = \overline{PR}$ e $\overline{PF_2} = \overline{PQ}$. Logo $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = |\overline{PQ} - \overline{PR}| = \overline{RQ}$, temos que esta diferença será sempre constante. ■

Proposição 2.8. *Seja um cone circular reto e um plano que o intersecta de tal modo que exista uma esfera que tangencia simultaneamente o plano e o cone. Se F é o ponto de interseção da esfera com o plano, e d a reta resultante da interseção entre o plano de corte e o plano ortogonal ao eixo do cone, então qualquer ponto P da interseção do cone como o plano de corte é tal que $D(P, F) = D(P, d)$.*

Figura 12 – Esferas de Dandelin - Parábola

Fonte: Próprio autor (2025).

Demonstração: Temos que F é o ponto de interseção da esfera com o plano α . Outro objeto necessário para a nossa demonstração é a reta d que é chamada de diretriz, que é o resultado da interseção do plano α com o plano β que contém o círculo c_1 . que é o resultado do cone C com a esfera S_1 . Seja Q a interseção do círculo c_1 com a geratriz paralela a α . Sendo P um ponto qualquer da interseção do plano α com o cone C e R um ponto de c_1 em que a esfera S_1 intersecta a geratriz que passa por P . Seja P' a projeção ortogonal de P sobre a reta diretriz. Pelo teorema do Bico, temos que $\overline{VR} = \overline{VQ}$ e $\overline{PR} = \overline{PF}$. Os triângulos isósceles VQR e RPP' são semelhantes, logo $\overline{PP'} = \overline{PR}$. Então teremos que $\overline{PF} = \overline{PP'}$. Logo a distância entre o ponto P sobre a parábola ao foco é a mesma que a distância entre P e a reta diretriz, conforme a figura 12. ■

Daremos uma definição mais geral sobre cônicas, onde esta ajudará a identificar objetos e comportamentos destas curvas.

Definição 2.11. (Dandelin) Dados uma reta d e um ponto F não pertencente à reta. Uma cônica pode ser definida como um lugar geométrico dos pontos cuja razão das distâncias ao ponto F e a reta d é uma constante real positiva que depende de cada curva. Esta constante será chamada excentricidade, a reta d de diretriz e F de foco.

Pela definição acima, temos que toda cônica deve ter pelo menos um foco, logo, iremos definir a corda focal da seguinte maneira.

Definição 2.12. A corda focal de uma cônica é todo segmento de reta que passa pelo foco e cujos pontos extremos pertencem à curva.

3 ELIPSE

Conforme a primeira lei de Kepler, as órbitas dos planetas do sistema solar são elípticas, com o sol em um dos focos. Logo, o estudo desta curva é de suma importância para a física e conseqüentemente para a matemática. Neste capítulo, provaremos as principais propriedades geométricas da elipse centrada na origem para facilitar o entendimento do leitor e também trabalharemos as equações canônica e polar e como estas ajudam a provar resultados importantes sobre esta curva. Este capítulo tem uma forte influência de Oliveira (2013) sobre alguns dos principais resultados, tais como Latus Rectum e das propriedades ópticas.

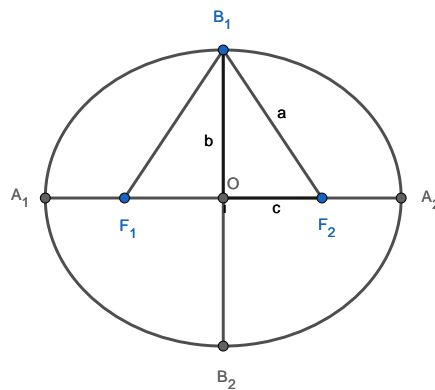
3.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS

Seguiremos como seqüência de conteúdos parte do livro texto da disciplina de geometria analítica do Profmat (2017), onde detalharemos alguns resultados e provaremos outros de forma mais algébrica. A definição que daremos a seguir é motivada pela Proposição 2.6.

Definição 3.1. Uma elipse ε de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual à constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$, ou seja, sendo $0 \leq c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$,

$$\varepsilon = \{P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a\}.$$

Figura 13 – Elementos da elipse



Fonte:Próprio autor (2025).

Elementos da elipse

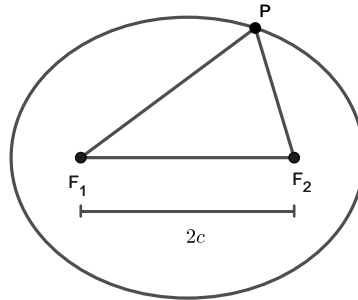
Como vemos na figura 13.

- F_1 e F_2 são os focos, onde a distância entre ambos será de $2c$.
- O é o centro.
- A_1A_2 é o eixo focal que mede $2a$ e B_1B_2 é o eixo não focal que mede $2b$.
- $\frac{c}{a} = e$, onde e é a excentricidade (que será provada mais adiante).

- Reta focal l passa por pelos focos.
- Reta não focal l' é perpendicular a reta l que passa pelo centro.

Condição de existência de uma elipse

Figura 14 – Condição de existência - elipse



Fonte: Próprio autor (2025).

Sendo $2c$ a distância focal e $2a$ a distância de um ponto da elipse aos focos. Para existir tal curva, devemos ter garantida a existência de triângulos PF_1F_2 , como mostrado na figura 14. Pela desigualdade triangular temos que: $\overline{F_1F_2} < \overline{PF_1} + \overline{PF_2}$, ou seja, $2c < 2a$. Para um estudo mais completo sobre propriedades geométricas das cônicas aconselhamos Almeida (?).

Discutiremos a seguir as posições relativas entre ponto e a curva elíptica. Sabemos pela definição que qualquer ponto pertencente a esta curva terá a soma das distâncias até os focos constante. Vamos analisar os casos de quando o ponto for interior e exterior.

Considere um ponto Q é interior à elipse se, para qualquer reta que liga um dos focos ao ponto Q , essa reta intersecta a elipse em um ponto P de tal forma que Q está entre o foco e P . Caso Q seja exterior, P estará entre o foco e Q .

Proposição 3.1. *Seja uma elipse com focos F_1 e F_2 e com eixo focal medindo $2a$. Considere Q um ponto arbitrário.*

a) *Se Q está no interior da elipse, então a $d(F_1, Q) + d(F_2, Q) < 2a$.*

b) *Se Q está no exterior da elipse, então a $d(F_1, Q) + d(F_2, Q) > 2a$.*

Demonstração: a) Sendo P pertencente a elipse, tal que $Q \in PF_1$ e utilizando a desigualdade triangular no triângulo $\triangle QPF_2$, de acordo com a figura 15, temos que

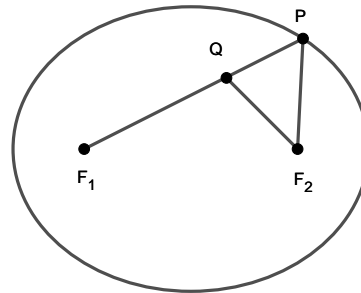
$$\begin{aligned}\overline{F_2Q} &< \overline{PQ} + \overline{PF_2} \\ \overline{F_1Q} + \overline{F_2Q} &< \overline{F_1Q} + \overline{PQ} + \overline{PF_2}.\end{aligned}$$

Como $\overline{F_1Q} + \overline{QP} = \overline{F_1P}$. temos

$$\overline{F_1Q} + \overline{F_2Q} < \overline{F_1P} + \overline{F_2P}.$$

Pela definição 3.1, $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$, concluímos

$$\overline{F_1Q} + \overline{F_2Q} < 2a.$$

Figura 15 – Ponto interno da elipse

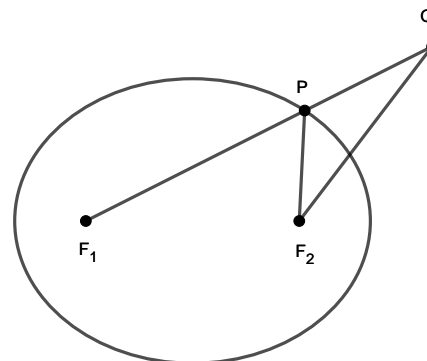
Fonte: Próprio autor (2025).

b) Sendo P pertencente a elipse, tal que $P \in QF_1$ e utilizando a desigualdade triangular no triângulo $\triangle QPF_2$, de acordo com a figura 16, temos que

$$\begin{aligned} \overline{PF_2} &< \overline{PQ} + \overline{QF_2} \\ \overline{PF_1} + \overline{PF_2} &< \overline{F_2Q} + \overline{PQ} + \overline{PF_1}. \end{aligned}$$

Como $\overline{F_1P} + \overline{PQ} = \overline{F_1Q}$, obtemos

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} < \overline{F_1Q} + \overline{F_2Q}.$$

Figura 16 – Ponto externo da elipse

Fonte: Próprio autor (2025).

Pela definição 3.1, $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$, logo

$$2a < \overline{F_1Q} + \overline{F_2Q}. \quad \blacksquare$$

Para um estudo da curva elíptica, deduziremos a seguir a famosa equação canônica. Através da equivalência desta equação com a definição, poderemos relacionar de forma algébrica o conjunto solução da equação com todos os pontos pertencentes a curva elíptica.

Equação canônica da elipse

Encontraremos a equação reduzida da elipse ou também conhecida como forma canônica. Sem perda de generalidade, tomemos uma elipse com as seguintes coordenadas: Os focos em $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, as extremidades do eixo maior em $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$ e as extremidades do eixo menor em $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$, onde $0 \leq c < a$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2}$. Pela a definição de elipse, temos que

$$\begin{aligned}
P = (x, y) \in \varepsilon &\Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \\
&\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\
&\Rightarrow \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
&\Rightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
&\Rightarrow 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&\Rightarrow a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&\Rightarrow (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2) \\
&\Rightarrow a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\
&\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \\
&\Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\
&\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.
\end{aligned}$$

Provaremos que a réplica é verdadeira.

$$\begin{aligned}
&\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\
&\Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \\
&\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \\
&\Rightarrow a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\
&\Rightarrow (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2).
\end{aligned}$$

Temos que provar que $a^2 - xc > 0$. Pela condição de existência, temos que $a > c$, suponhamos que $x > a$, teremos que $\frac{x^2}{a^2} > 1 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$, absurdo, temos $x \leq a$. Logo $a^2 - xc > 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
&a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&\Rightarrow 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
&\Rightarrow x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
&\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
&\Rightarrow (x+c)^2 + y^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2})^2.
\end{aligned}$$

Temos que provar que $(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}) \geq 0$. Como $\frac{y^2}{b^2} \leq \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 \leq b^2 \Rightarrow -b^2 + y^2 \leq 0$. Segue que $(x-c)^2 + y^2 = x^2 - 2cx + c^2 + y^2 \leq a^2 + 2a^2 + a^2 - b^2 + y^2 \leq 4a^2$. Logo $(2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}) \geq 0$ e portanto

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Forma canônica da elipse transladada

Por meio de uma translação dos eixos coordenados, obteremos uma equação de uma elipse ε onde a reta focal é horizontal ou vertical. Transladando o sistema OXY para a nova origem $\bar{O} = (x_0, y_0)$ obteremos o sistema ortogonal $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$.

Vamos encontrar a equação canônica da elipse de centro $\bar{O} = (x_0, y_0)$, onde a reta focal é $l : y = y_0$ e com focos $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$. Sendo $P = (x, y) = (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$ um ponto pertencente a elipse.

$$P = (x, y) \in \varepsilon \Leftrightarrow d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a.$$

Logo

$$d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 - c, y_0)) + d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 + c, y_0)) = 2a.$$

Como

$$d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 - c, y_0)) = \sqrt{(\bar{x} - (-c))^2 + \bar{y}^2} = d((\bar{x}, \bar{y}), (-c, 0))$$

e

$$d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 + c, y_0)) = \sqrt{(\bar{x} - (c))^2 + \bar{y}^2} = d((\bar{x}, \bar{y}), (c, 0)).$$

Temos que

$$d((\bar{x}, \bar{y}), (-c, 0)) + d((\bar{x}, \bar{y}), (c, 0)) = 2a.$$

Assim,

$$\frac{\bar{x}^2}{a^2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2} = 1$$

e, portanto,

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Logo, a equação canônica da elipse ε de centro $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX é:

$$\varepsilon : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

onde $b^2 = a^2 - c^2$ é uma translação em relação à origem.

Com os resultados obtidos até o momento, podemos discutir de forma analítica as regiões determinadas por uma curva elíptica.

Regiões do plano determinadas por uma elipse

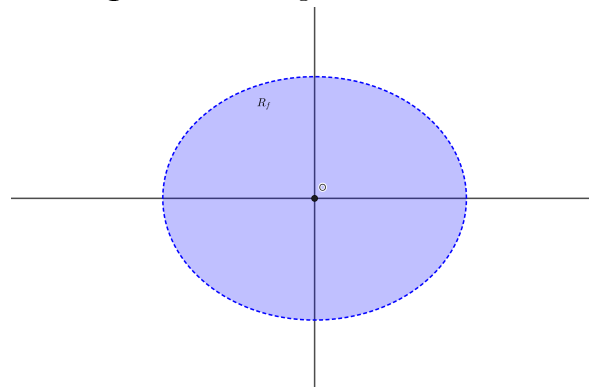
Dada uma elipse ε , temos que está divide o plano em três subconjuntos disjun-

tos que são: a própria curva elíptica, a região que contém os pontos internos ou também conhecida por região focal denominada por R_f e a região que contém os pontos externos que podemos chamar de região não focal denominada por R_{nf} .

Vamos analisar as possíveis relações algébricas dos pontos de R_f e de R_{nf} de uma elipse centrada na origem, como mostram as figura 17 e 18.

Se $P \in R_f$, temos que $d(F_1, P) + d(F_2, P) < 2a$, utilizando os mesmos passos da forma canônica, chegaremos na relação: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$.

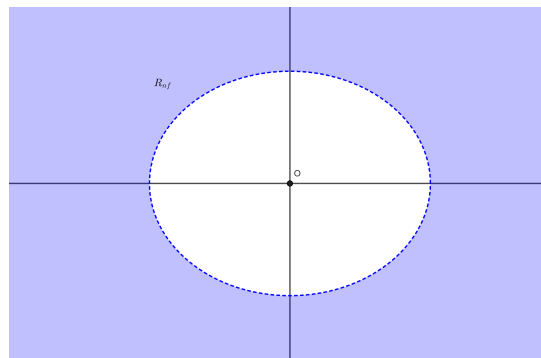
Figura 17 – Região focal - Elipse



Fonte: Próprio autor (2025).

Se $P \in R_{nf}$, temos que $d(F_1, P) + d(F_2, P) > 2a$, de forma análoga utilizada na forma canônica, teremos a relação: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1$.

Figura 18 – Região não focal - Elipse



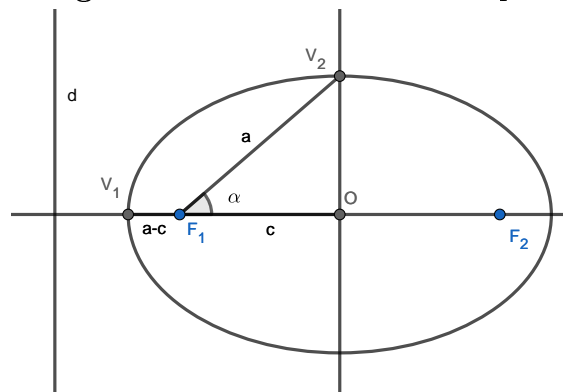
Fonte: Próprio autor (2025).

Na definição dada por Dandelin, o mesmo cita a reta diretriz e a excentricidade como informações de suma importância para um estudo mais completo das cônicas. Os próximos resultados iremos relacionar o valor da excentricidade com os coeficientes c e a e encontraremos as equações das retas diretrizes da elipse.

Excentricidade de uma elipse

Proposição 3.2. *A excentricidade da elipse é igual a $\frac{c}{a}$.*

Demonstração: Consideremos uma elipse com semi-eixo focal medindo a , o semi-eixo não-focal medindo b e a distância de qualquer foco até o centro sendo c . Suponhamos que d seja a reta diretriz dos vértices V_1 e V_2 , conforme a figura 19.

Figura 19 – Excetricidade da elipse

Fonte: Próprio autor (2025).

Temos que, $e = \frac{d(V_1, F)}{d(V_1, d)}$.

Portanto,

$$d(V_1, d) = \frac{a - c}{e}.$$

Logo

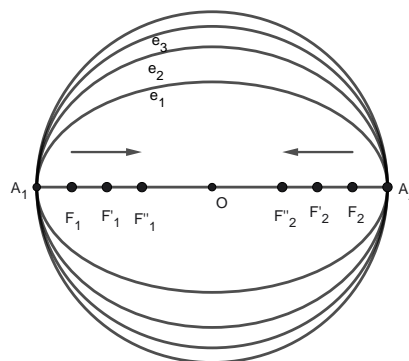
$$\begin{aligned} e = \frac{d(V_2, F)}{d(V_2, d)} = \frac{a}{a + d(V_1, d)} &\Rightarrow e = \frac{a}{a + \frac{a-c}{e}} \Rightarrow ae + a - c = a \\ &\Rightarrow e = \frac{c}{a} = \cos(\alpha). \end{aligned}$$

■

Observação 3.1. Pela condição de existência $0 < c < a$, então podemos concluir que $0 < e < 1$, ou seja, a excentricidade está entre 0 e 1.

Observação 3.2. Quando mantemos fixo o eixo maior de uma elipse e fazemos o eixo focal tender a zero, ou seja, os focos se coincidirem. Temos que a excentricidade será igual a zero e a elipse se degenera numa circunferência de diâmetro coincidente com o eixo maior.

Observação 3.3. Quando mantemos fixo o eixo maior de uma elipse e fazemos o eixo focal tender ao tamanho do eixo maior, como podemos observar na figura 20. Temos que a excentricidade será igual a um e a elipse se degenerará no seu eixo maior.

Figura 20 – Deformação da elipse

Fonte: Próprio autor (2025).

Diretrizes

Proposição 3.3. *As equações da retas diretrizes da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ são $x = -\frac{a}{e}$ e $x = \frac{a}{e}$.*

Demonstração: Pela figura 19, temos que $d(O, d) = d(v_1, d) + a = \frac{a-c}{e} + a = \frac{a-c}{e} + \frac{c}{e} = \frac{a}{e}$. Logo a distância entre o centro e as diretrizes é $\frac{a}{e}$, então as equações das diretrizes serão $x = -\frac{a}{e}$ e $x = \frac{a}{e}$. ■

Em posse da equação canônica, podemos dá uma demonstração algébrica da simetria da elipse sem utilizar ferramentas de geometria plana para tal prova.

Simetria da elipse

Proposição 3.4. *A elipse é simétrica em relação a:*

- a) *Reta focal.*
- b) *Reta não focal.*
- c) *Ao centro.*

Demonstração: a) Se $P = (x, y)$ pertence a elipse, temos pelo o resultado anterior que:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se P' é simétrico a P em relação à reta focal, então $P' = (x, -y)$. Como

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Temos que P' pertence a elipse. Logo há simetria em relação à reta focal.

b) Se P'' é simétrico a P em relação a reta não focal, então $P'' = (-x, y)$, como

$$\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Então P'' pertence a elipse. Logo há simetria em relação à reta não focal.

c) Se P^* é simétrico a P em relação a origem, então $P^* = (-x, -y)$, como

$$\frac{(-x)^2}{a^2} + \frac{(-y)^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Então P^* pertence a elipse. Logo há simetria em relação a origem. ■

Através da certeza da simetria da elipse, podemos calcular mais facilmente a área desta curva. Utilizaremos ferramentas de cálculo integral para encontrar a área referente a um quadrante.

Proposição 3.5. *A área da elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ é igual a $ab\pi$.*

Demonstração: Calcularemos a $\int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx$, onde encontraremos a área referente ao primeiro quadrante.

Logo, $\int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$.

Fazendo a mudança de variável $x = a \operatorname{sen}(t)$, onde $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ficamos com $ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)^2 dt$. Onde obtemos o resultado de $\frac{\pi \cdot ab}{4}$. Como as quatro áreas são iguais, logo a área total é $\pi \cdot a \cdot b$. ■

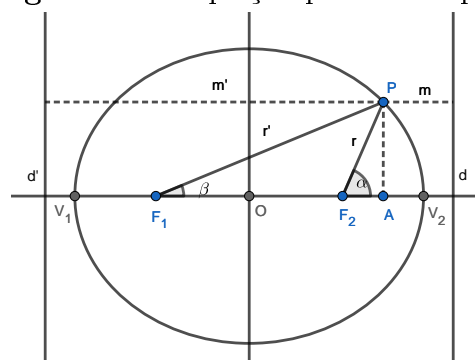
Deduziremos as equações polares da elipse, que faremos de duas maneiras, pois a posição das diretrizes podem mudar a forma de cada uma. Nosso grande interesse nestas equações é encontrar de forma mais simples o comprimento da corda focal mínima.

Equação polar

Vamos encontrar as equações polares de quando o eixo polar corta a diretriz e de quando não corta, como veremos na figura 21.

Dado uma elipse de focos F_1 e F_2 , vértices V_1 e V_2 e centro O . Sendo um ponto $P = (x, y)$ da elipse, A a projeção de P sobre o eixo x e r e r' as distâncias de P até F_2 e F_1 respectivamente. As retas diretrizes dessa elipse serão d e d' e as distâncias de P até d e d' são respectivamente m e m' . Tendo como as distâncias do centro até o focos e até os vértices c e a respectivamente. Denominaremos por α o ângulo $\widehat{AF_2P}$ e por β o ângulo $\widehat{AF_1P}$.

Figura 21 – Equação polar da elipse



Fonte: Próprio autor (2025).

1º caso: quando o eixo polar corta a diretriz.

Pela figura 21, temos que $\overline{OF_2} + \overline{F_2A} + d(A, d) = \overline{OV_2} + d(V_2, d)$, logo

$$c + r \cos(\alpha) + m = a + \frac{a - c}{e}.$$

Pela excentricidade da elipse, temos que $e = \frac{r}{m} \Rightarrow m = \frac{r}{e}$.

Então $c + r \cos(\alpha) + \frac{r}{e} = a + \frac{a - c}{e}$. Logo,

$$ec + er \cos(\alpha) + r = ae + a - c \Rightarrow r(1 + e \cos(\alpha)) = ae - ce + a - c.$$

Como $e = \frac{c}{a}$, temos

$$r(1 + e \cos(\alpha)) = a - \frac{c^2}{a} \Rightarrow r(1 + e \cos(\alpha)) = \frac{a^2 - c^2}{a}.$$

Pela igualdade $a^2 - c^2 = b^2$. Então $r = \frac{b^2}{a(1 + e \cos(\alpha))}$.

2º caso: quando o eixo polar não corta a diretriz.

Pela figura 21, temos que $\overline{F_1A} + \overline{F_1V_1} + d(V_1, d') = d(P, d')$, logo

$$r' \cos(\beta) + a - c + \frac{a - c}{e} = m'.$$

Pela excentricidade da elipse, temos que $e = \frac{r'}{m'} \Rightarrow m' = \frac{r'}{e}$.

Então, $r' \cos(\beta) + a - c + \frac{a - c}{e} = \frac{r'}{e}$.

Logo

$$er' \cos(\beta) + ea - ec + a - c = r' \Rightarrow r'(1 - e \cos(\beta)) = ae - ce + a - c.$$

Como $e = \frac{c}{a}$, temos

$$r'(1 - e \cos(\beta)) = a - \frac{c^2}{a} \Rightarrow r'(1 - e \cos(\beta)) = \frac{a^2 - c^2}{a}.$$

Pela igualdade $a^2 - c^2 = b^2$. Então, $r' = \frac{b^2}{a(1 - e \cos(\beta))}$.

Com uso da forma polar da elipse, encontraremos o comprimento da corda focal mínima ou mais conhecida como Latus Rectum.

Latus Rectum

Teorema 3.1. *O comprimento da corda focal mínima é $\frac{2b^2}{a}$.*

Demonstração: Calcularemos a corda focal mínima utilizando a equação canônica.

Para a equação $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, sendo PQ uma corda focal desta elipse, ou seja, P e Q pertencem a mesma como vemos na figura 22. Sendo o foco em que PQ passa, temos que $\overline{PQ} = \overline{PF} + \overline{FQ}$.

Utilizando a equação polar, temos que

$$\overline{PF} = \frac{b^2}{a(1 + e \cos(\alpha))}$$

e

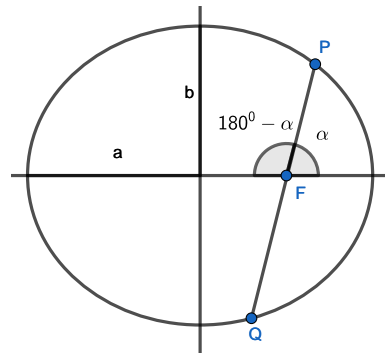
$$\overline{QF} = \frac{b^2}{a(1 + e \cos(\alpha + 180^\circ))} = \frac{b^2}{a(1 - e \cos(\alpha))}.$$

Logo $\overline{PQ} = \overline{PF} + \overline{FQ} = \frac{b^2}{a(1 + e \cos(\alpha))} + \frac{b^2}{a(1 - e \cos(\alpha))}$.

Portanto,

$$\overline{PQ} = \frac{b^2}{a} \left(\frac{1 - \cos(\alpha) + 1 + \cos(\alpha)}{(1 + \cos(\alpha))(1 - \cos(\alpha))} \right) = \frac{2b^2}{a(1 - \cos^2(\alpha))}.$$

Para que o comprimento seja mínimo, o valor de $1 - \cos^2(\alpha)$ deve ser máximo, logo $\alpha = 90^\circ$. Onde resultará em $\overline{PQ} = \frac{2b^2}{a}$. ■

Figura 22 – Latus Rectum - Elipse

Fonte: Próprio autor (2025).

Traçado da elipse por pontos

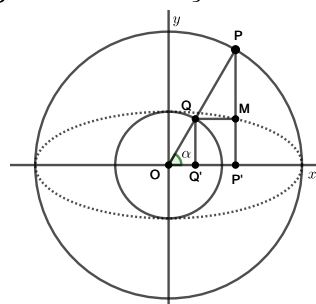
Dada a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Construindo duas circunferências concêntricas de centro O de raios a e b , onde $a > b$. A partir do centro traçaremos uma semirreta qualquer e denominaremos por α o ângulo polar dessa semirreta. Essa semirreta cortará a circunferência menor em Q e a maior em P . Traçando por P a reta r_1 paralela ao eixo OY e por Q a reta r_2 paralela ao eixo OX . Sendo P' e Q' as projeções sobre o eixo OX dos pontos P e Q , respectivamente, e M a interseção de r_1 e r_2 .

Expressando as coordenadas do ponto M por meio de α , teremos que

$$x = \overline{OP'} = \overline{OP} \cdot \cos \alpha = a \cdot \cos \alpha \text{ e } y = \overline{P'M} = \overline{Q'Q} \cdot \sin \alpha = b \cdot \sin \alpha.$$

Substituindo x e y na equação acima e pela relação fundamental trigonométrica, a equação é satisfeita para todo α e, portanto, o ponto M está situado na elipse dada como podemos observar na figura 23.

Figura 23 – Traçado da elipse

Fonte: Próprio autor (2025).

Equação quadrática da elipse

Ao analisar a equação canônica da elipse centrada no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OX : $\varepsilon : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

Escrevendo os quadrados como trinômios e depois multiplicando ambos os lados por a^2b^2 , poderemos reescrever a equação da seguinte forma:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0.$$

Ao comparar com a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, temos que $A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = -2a^2y_0$ e $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$, onde os coeficientes A e C tem o mesmo sinal.

O próximo resultado tem forte aplicação em óptica. Utilizaremos ferramentas de geometria plana para provar este valioso resultado.

3.2 PROPRIEDADES ÓPTICAS

Teorema 3.2. (*Princípio de reflexão das elipses*) *Seja um ponto P da elipse ε de foco F_1 e F_2 . Os segmentos PF_1 e PF_2 formam ângulos iguais com a reta tangente a ε em P , e que a reta normal a ε em P é a bissetriz do ângulo $\widehat{F_1PF_2}$.*

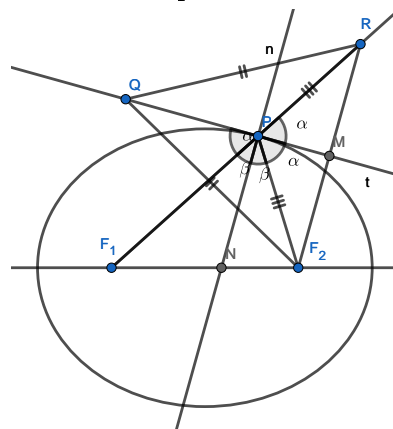
Demonstração: Seja t a bissetriz do ângulo externo a $\widehat{F_1PF_2}$, com P pertencente à elipse de Focos F_1 e F_2 , de acordo com a figura 24. Q é um ponto da reta t distinto de P . Seja R o ponto simétrico de F_2 em relação à reta t e M o ponto médio RF_2 , onde M pertence a t . Logo os triângulos $\triangle PRF_2$ e $\triangle QRF_2$ são isósceles, com $\overline{PR} = \overline{PF_2}$ e $\overline{QR} = \overline{QF_2}$. Então, $2a = \overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \overline{PF_1} + \overline{PR} = \overline{F_1R}$, utilizando a desigualdade triangular em $\triangle QF_1R$, teremos que $\overline{QF_1} + \overline{QR} > \overline{F_1R} \Rightarrow \overline{QF_1} + \overline{QF_2} > 2a$.

Conclui-se, portanto, que o ponto Q está no exterior da elipse. Desde que Q pode assumir qualquer ponto da reta t distinto de P , segue que P é o único ponto de t que pertence à elipse, ou seja, t é tangente à elipse no ponto P .

Temos que t é tangente e também bissetriz, temos que $\alpha = \angle F_2PM = \angle MPR$. Como os ângulos \widehat{MPR} e $\widehat{F_1PQ}$ são opostos pelo vértice, temos que $\angle F_1PQ = \alpha$.

Sendo n a reta normal a ε no ponto P . Temos N como o ponto de interseção de n com o segmento F_1F_2 . Temos que $\angle QPF_1 + \angle F_1PN = \angle NPF_2 + \angle F_2PM$. Como $\angle QPF_1 = \angle F_2PM$, então $\angle F_1PN = \angle NPF_2$. Logo n é bissetriz do ângulo $\widehat{F_1PF_2}$. ■

Figura 24 – Princípio de reflexão da elipse



Fonte: Próprio autor (2025).

Teorema 3.3. (*Poncelet*) *Seja P um ponto exterior a uma elipse ε de focos F_1 e F_2 com eixo maior medindo $2a$. Sejam t_1 e t_2 as retas tangentes a ε que passam por P e X e Y seus respectivos pontos de tangência, teremos que:*

$$\begin{aligned}\angle XPF_1 &= \angle YPF_2 \\ \angle PF_1X &= \angle PF_1Y \\ \angle PF_2X &= \angle PF_2Y.\end{aligned}$$

Demonstração: Seja S_1 o ponto simétrico de F_1 em relação à reta t_1 e S_2 o ponto simétrico de F_2 em relação à reta t_2 como vemos na figura 25. Temos que os triângulos $\triangle PF_1S_1$ e $\triangle PF_2S_2$ são isósceles e consequentemente $\angle S_1PX = \angle F_1PX = \theta$ e $\angle S_2PY = \angle F_2PY = \theta'$.

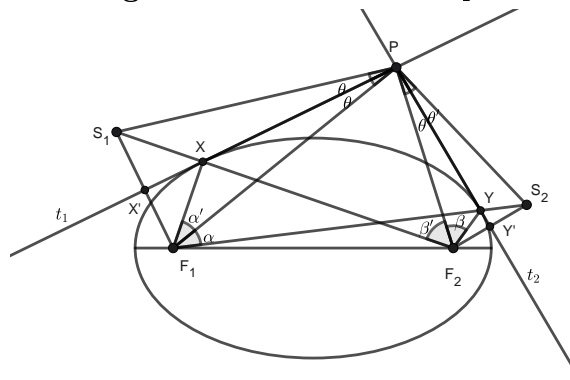
Sendo X' o ponto médio de F_1S_1 e que também pertence a t_1 . Pelo teorema das tangentes tem-se $\angle S_1XX' = \angle F_1XX' \Rightarrow S_1, X$ e F_2 , estão sobre a mesma reta. Como X pertence a elipse, temos que $\overline{XF_1} + \overline{XF_2} = 2a$ e do fato que $\triangle S_1XF_1$ é isósceles segue: $\overline{S_1X} = \overline{XF_1} \Rightarrow \overline{S_1X} + \overline{XF_2} = 2a \Rightarrow \overline{F_2S_1} = 2a$.

Usando o argumento análogo temos que Y' o ponto médio de F_2S_2 e que também pertence a t_2 . Pelo teorema das tangentes tem-se $\angle S_2YY' = \angle F_2YY' \Rightarrow S_2, Y$ e F_1 , estão sobre a mesma reta. Como Y pertence à elipse, temos que $YF_1 + YF_2 = 2a$ e do fato que $\triangle S_2YF_2$ é isósceles segue: $\overline{S_2Y} = \overline{YF_2} \Rightarrow \overline{S_2Y} + \overline{YF_1} = 2a \Rightarrow \overline{S_2F_1} = 2a$.

Como $\overline{F_2S_1} = \overline{S_2F_1}$, $\overline{PF_2} = \overline{PS_2}$ e $\overline{PS_1} = \overline{PF_1}$, logos os triângulos $\triangle S_1PF_2$ e $\triangle S_2PF_1$ são congruentes pelo caso (L.L.L). Então, $\angle S_1PF_2 = \angle F_1PF_1 \Rightarrow 2\theta + \angle F_1PF_2 = 2\theta' + \angle F_1PF_2 \Rightarrow \theta = \theta'$.

Os triângulos $\triangle PF_1S_2$ e $\triangle PF_2S_1$ são congruentes, segue que $\angle S_2F_1P = \angle F_2S_1P = \alpha$ e $\angle S_1F_2P = \angle F_1S_2P = \beta'$. Sendo $\angle PF_1X = \alpha'$, pelo caso (L.A.L) os triângulos $\triangle S_1XP$ e $\triangle F_1XP$ são congruentes e logo $\alpha = \alpha'$. Como $\angle PF_2Y = \beta$, visto que os triângulos $\triangle PF_2Y$ e $\triangle PS_2Y$ são congruentes pelo caso (L.A.L), segue que $\beta = \beta'$. ■

Figura 25 – Poncelet - Elipse



Fonte: Próprio autor (2025).

3.3 APLICAÇÕES

Refletor odontológico Uma aplicação direta do princípio de reflexão é o refletor odontológico, que utiliza a propriedade mencionada acima para iluminar apenas os dentes que serão tratados, evitando o desconforto para o paciente. Este dispositivo consiste em

uma superfície espelhada no formato de um arco de elipse, onde é colocada uma lâmpada no foco mais próximo, como vemos na figura 26. A luz da lâmpada é concentrada pela superfície elíptica no outro foco, onde estará localizado o dente a ser tratado pelo profissional.

Figura 26 – Refletor elíptico

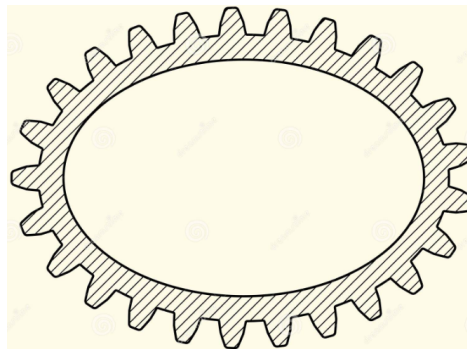


Fonte: Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2014)

Engrenagem elíptica

As engrenagens elípticas têm um formato de elipse, em vez do formato tradicional circular, utilizadas em movimentos uniformes, como mostra a figura 27. Trabalhando em pares, girando em eixos paralelos, essas engrenagens apresentam características únicas. Este perfil elíptico é bastante útil em aplicações que necessitem de uma transmissão de movimento não uniforme sem utilização de mecânicas adicionais. Devido ao seu formato alongado, a engrenagem elíptica consegue variar a sua velocidade angular, suavizando o movimento.

Figura 27 – Engrenagem elíptica



Fonte: Dreamstime (2025)

4 HIPÉRBOLE

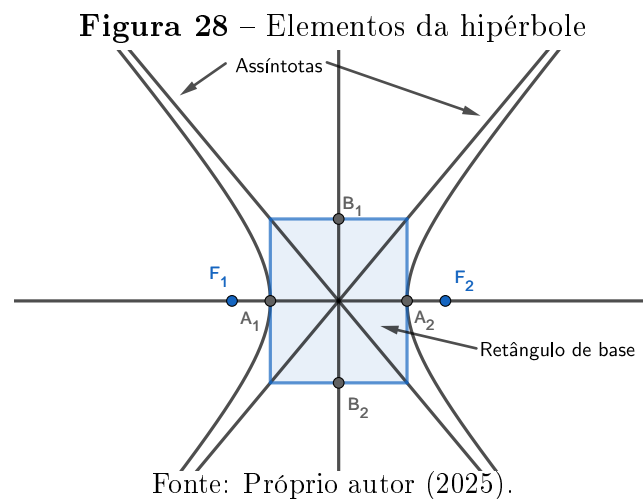
Na Grécia antiga o matemático Apolônio já usava a hipérbole para resolver o famoso problema de trissecção de um ângulo. Neste capítulo estudaremos propriedades do capítulo anterior, mas com um olhar voltado para a cônica hipérbole.

4.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES GEOMÉTRICOS

A definição a seguir foi impulsionada pela Proposição 2.7, de onde deduziremos informações importantes de forma análoga aos resultados sobre elipse.

Definição 4.1. Uma hipérbole \mathcal{H} de focos F_1 e F_2 é o conjunto dos pontos P do plano para os quais o módulo da diferença de suas distâncias a F_1 e F_2 é igual a constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c > 0$,

$$\mathcal{H} = \{P \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}, 0 < a < c, d(F_1, F_2) = 2c.$$



Elementos da hipérbole

Como vemos na figura 28.

- F_1 e F_2 são os focos, onde a distância entre ambos será de $2c$.
- A reta l que passa pelos focos é chamada reta focal.
- Os vértice A_1 e A_2 são os pontos de interseção da reta l com a hipérbole \mathcal{H} .
- O segmento A_1A_2 é o eixo focal de medida igual a $2a$.
- O ponto O é o ponto médio do eixo focal, que também é o centro da hipérbole.
- A reta l' perpendicular a reta l que passa pelo centro é denominada reta não focal.
- Sendo $b^2 = c^2 - a^2$, temos que B_1 e B_2 são denominados vértices imaginários situados em l' , onde a distância entre ambos até o centro é b e seu ponto médio será O .
- O segmento B_1B_2 é o eixo não focal de medida igual a $2b$.
- A excentricidade da hipérbole \mathcal{H} é $e = \frac{c}{a}$, onde podemos notar que $e > 1$, pois $c > a$ (tal afirmação será provada mais adiante).

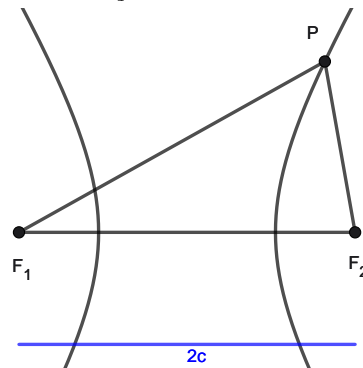
Retângulo da base da hipérbole \mathcal{H}

É o retângulo cujos lados têm como pontos médios A_1, A_2, B_1 e B_2 . As retas que contêm as diagonais do retângulo da base são chamadas de assíntotas de \mathcal{H} . Temos que as assíntotas de \mathcal{H} passam pelo o centro da hipérbole e possuem inclinação $\pm \frac{b}{a}$ em relação a reta focal l . Então, as retas l e l' são bissetrizes das assíntotas.

Condição de existência da hipérbole

Sendo $2c$ e $2a$ a distância focal e o módulo da diferença entre $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ respectivamente, onde P é um ponto da hipérbole. Para que a curva exista, temos que a condição de existência do triângulo F_1PF_2 deve ser satisfeita, de acordo com a figura 29. Então $\overline{F_1F_2} > \overline{PF_1} - \overline{PF_2}$, ou seja, $2c > 2a$.

Figura 29 – Condição de existência da hipérbole



Fonte: Próprio autor (2025).

Análogo ao que foi definido para elipse, considere um ponto Q é interior à hipérbole se, para qualquer reta que liga um dos focos ao ponto Q , essa reta intersecta a hipérbole em um ponto P de tal forma que Q está entre o foco e P . Caso Q seja exterior, o ponto P estará entre o foco e Q .

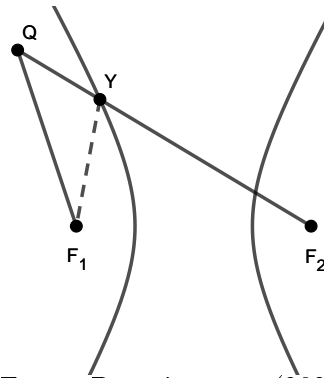
Proposição 4.1. *Sendo d o módulo da diferença das distâncias de qualquer ponto da hipérbole \mathcal{H} aos focos F_1 e F_2 . Para qualquer ponto Q , temos que:*

- (a) *Se Q é interior a \mathcal{H} , então $|\overline{QF_2} - \overline{QF_1}| > d$.*
- (b) *Se Q é exterior a \mathcal{H} , então $|\overline{QF_2} - \overline{QF_1}| < d$.*

Demonstração: a) Sem perda de generalidade, suponhamos que Q seja interno a \mathcal{H} no ramo esquerdo. Sendo Y o ponto de interseção de $\overline{QF_2}$ com o ramo esquerdo da hipérbole, logo $\overline{F_2Y} - \overline{F_1Y} = 2a = d$.

Aplicando a desigualdade triangular no triângulo $\triangle F_1YQ$, como vemos na figura 30, temos que

$$\begin{aligned} \overline{F_1Q} &< \overline{F_1Y} + \overline{QY} \\ -\overline{F_1Y} - \overline{QY} &< -\overline{F_1Q} \\ \overline{F_2Q} - \overline{F_1Y} - \overline{QY} &< \overline{F_2Q} - \overline{F_1Q}. \end{aligned}$$

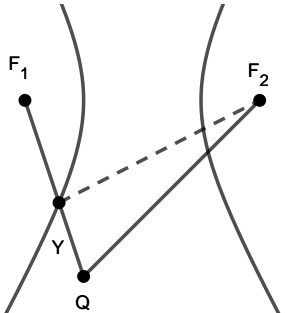
Figura 30 – Ponto interno da hipérbole

Fonte: Próprio autor (2025).

Como $\overline{F_2Q} = \overline{F_2Y} + \overline{YQ}$, temos

$$\begin{aligned} \overline{F_2Y} + \overline{YQ} - \overline{F_1Y} - \overline{QY} &< \overline{F_2Q} - \overline{F_1Q} \\ \overline{F_2Y} - \overline{F_1Y} &< \overline{F_2Q} - \overline{F_1Q}. \end{aligned}$$

b) Sendo Y o ponto de interseção de $\overline{QF_2}$ com o ramo esquerdo da hipérbole, logo $\overline{F_2Y} - \overline{F_1Y} = 2a = d$.

Figura 31 – Ponto externo da hipérbole

Fonte: Próprio autor (2025).

Aplicando a desigualdade triangular no triângulo $\triangle F_1YQ$, como vemos na figura 31, temos que

$$\begin{aligned} \overline{F_2Q} &< \overline{F_2Y} + \overline{QY} \\ \overline{F_2Q} - \overline{F_1Q} &< \overline{F_2Y} + \overline{QY} - \overline{F_1Q}. \end{aligned}$$

Como $\overline{F_1Y} + \overline{YQ} = \overline{F_1Q} \Rightarrow \overline{YQ} = \overline{F_1Q} - \overline{F_1Y}$, logo

$$\begin{aligned} \overline{F_2Q} - \overline{F_1Q} &< \overline{F_2Y} + \overline{F_1Q} - \overline{F_1Y} - \overline{F_1Q} \\ \overline{F_2Q} - \overline{F_1Q} &< \overline{F_2Y} - \overline{F_1Y} = 2a = d. \end{aligned}$$

■

Equação canônica

Utilizando procedimento parecido ao que fizemos com a elipse, encontraremos a forma canônica da hipérbole de centro e reta focal coincidente com o eixo OX . Sem

perda de generalidade, tomemos uma hipérbole com as seguintes coordenadas:

Os focos em $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$, as extremidades do eixo focal em $A_1 = (-a, 0)$ e $A_2 = (a, 0)$ e as extremidades não focal em $B_1 = (0, -b)$ e $B_2 = (0, b)$.

Logo, Se $P = (x, y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a$.

Lembrando que: $b^2 = c^2 - a^2$. Temos que

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 \Leftrightarrow & (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
 \Leftrightarrow & 4xc = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 \Leftrightarrow & cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 \Leftrightarrow & (cx - a^2)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2) \\
 \Leftrightarrow & a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\
 \Leftrightarrow & (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \\
 \Leftrightarrow & -b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \\
 \Leftrightarrow & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.
 \end{aligned}$$

Para justificar tal equivalência, $\frac{x^2}{a^2} \geq \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} \geq 1 \Rightarrow x^2 \geq a^2 \Rightarrow x \geq a$ ou $x \leq -a$. Como as equivalências acima são referente ao ramo direito, temos que $x \geq a$ e por definição, $c > a$, então $cx - a^2 > 0$,

$$\begin{aligned}
 & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = -2a \\
 \Leftrightarrow & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 \Leftrightarrow & (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
 \Leftrightarrow & x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
 \Leftrightarrow & 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 \Leftrightarrow & cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
 \Leftrightarrow & (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2) \\
 \Leftrightarrow & a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) \\
 \Leftrightarrow & (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \\
 \Leftrightarrow & -b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2 \\
 \Leftrightarrow & \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.
 \end{aligned}$$

Para justificar as equivalências acima pertencentes ao ramo esquerdo, temos que $x \leq -a$ e por definição, $c > a > -a$, então $cx - a^2 > 0$. Lembrando que $|a| = -a$.

Temos também que x é negativo e o valor absoluto da diferença $x - c$ é igual a $|x| + c$. Como $|x| \geq a$ e $c > a$, temos que:

$$\begin{aligned} |x - c| &= |x| + c > 2a \\ \Rightarrow (x - c)^2 &\geq 4a^2 \\ \Rightarrow (x - c)^2 + y^2 &\geq (x - c)^2 > 4a^2 \\ \Rightarrow (x - c)^2 + y^2 &> 4a^2 \\ \Rightarrow (x - c)^2 + y^2 - 4a^2 &> 0. \end{aligned}$$

Forma canônica da Hipérbole transladada

Mediante uma translação dos eixos coordenados, obteremos uma equação de uma hipérbole \mathcal{H} onde a reta focal é horizontal ou vertical. Transladando o sistema OXY para a nova origem, $\bar{O} = (x_0, y_0)$ obteremos o sistema ortogonal $\bar{O}\bar{X}\bar{Y}$.

Vamos encontrar a equação canônica da hipérbole de centro $\bar{O} = (x_0, y_0)$, onde a reta focal é $l : y = y_0$ e os focos $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$. Sem perda de generalidade, podemos ter um ponto $P = (x, y) = (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$ pertencente ao ramo direito da hipérbole.

Assim,

$$P = (x, y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow d(P, F_1) - d(P, F_2) = 2a.$$

Portanto,

$$d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 - c, y_0)) - d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 + c, y_0)) = 2a.$$

Como

$$d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 - c, y_0)) = \sqrt{(\bar{x} - (-c))^2 + \bar{y}^2} = d((\bar{x}, \bar{y}), (-c, 0))$$

e

$$d((\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0), (x_0 + c, y_0)) = \sqrt{(\bar{x} - (c))^2 + \bar{y}^2} = d((\bar{x}, \bar{y}), (c, 0)).$$

Temos

$$d((\bar{x}, \bar{y}), (-c, 0)) - d((\bar{x}, \bar{y}), (c, 0)) = 2a.$$

Conseqüentemente

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Logo, a equação canônica da hipérbole \mathcal{H} de centro $\bar{O} = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo OX é:

$$\mathcal{H} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \text{ onde } b^2 = c^2 - a^2.$$

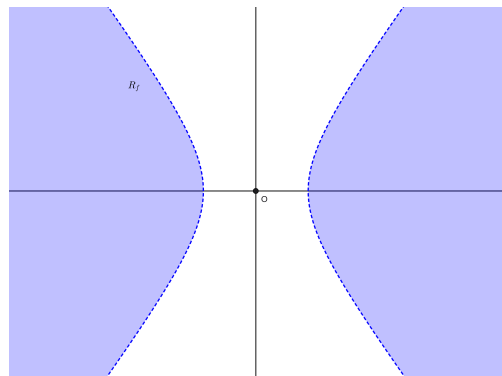
Regiões do plano determinadas por uma hipérbole

Dada uma hipérbole, temos que esta divide o plano em três regiões distintas, que são: a própria hipérbole, a região dos pontos internos ou região focal, pois contém os focos, que será denominada por R_f e a região dos pontos externos ou também região não focal, denominada por R_{nf} .

Vamos analisar as possíveis relações algébricas dos pontos de R_f e de R_{nf} de uma hipérbole centrada na origem como mostram as figuras 32 e 33.

Se $P \in R_f$, temos que $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| > 2a$. De forma análoga à forma canônica, chegaremos à seguinte relação: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1$.

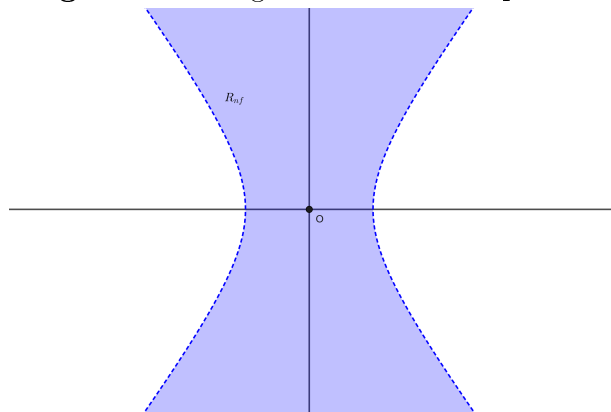
Figura 32 – Região focal - Hipérbole



Fonte: Próprio autor (2025).

Se $P \in R_{nf}$, temos que $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| < 2a$. De forma análoga à forma canônica, chegaremos na seguinte relação: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$.

Figura 33 – Região não focal - Hipérbole



Fonte: Próprio autor (2025).

Excentricidade de uma hipérbole

Proposição 4.2. A excentricidade da hipérbole é igual a $\frac{c}{a}$.

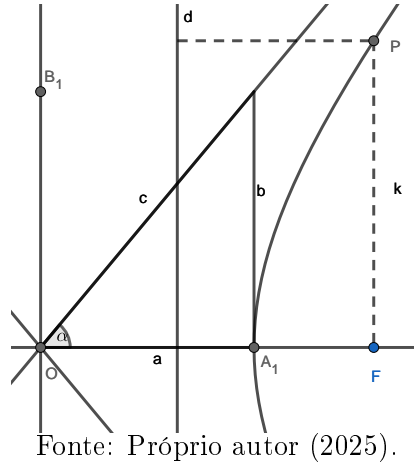
Demonstração: Consideremos uma hipérbole centrada na origem e com foco $F = (c, 0)$, fazendo certo ponto P coincidir com o vértice A_1 , de acordo com a figura 34, temos que

$$e = \frac{d(A_1, F)}{d(A_1, d)} = \frac{c - a}{d(A_1, d)}.$$

Logo

$$d(A_1, d) = \frac{c - a}{e}.$$

Figura 34 – Excentricidade da hipérbole



Fonte: Próprio autor (2025).

Tomemos o ponto P da hipérbole que possui a mesma coordenada x de F . Logo, se $\overline{PF} = k$ teremos que $P(c, k)$. Pela equação canônica, teremos que: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Da equação canônica $\frac{c^2}{a^2} - \frac{k^2}{b^2} = 1$, temos

$$k^2 = \frac{b^4}{a^2}$$

$$k = \frac{b^2}{a}.$$

Novamente utilizaremos a definição de excentricidade:

$$e = \frac{d(P, F)}{d(P, d)} = \frac{k}{d(A_1, F) + d(A_1, d)} = \frac{b^2}{a(c - a + \frac{c-a}{e})}.$$

Obtemos:

$$b^2 = ea(c - a) + ac - a^2$$

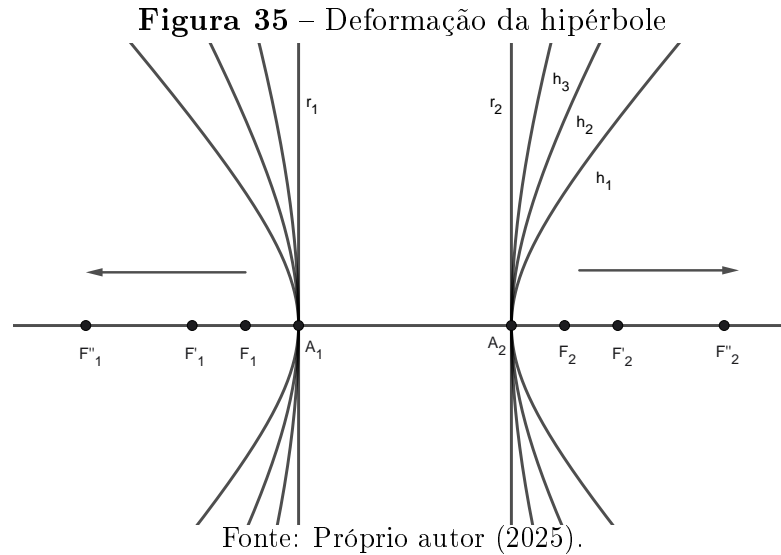
$$ea(c - a) = c^2 - ac$$

$$e = \frac{c}{a} = \sec(\alpha).$$

Observação 4.1. Pela condição de existência da hipérbole, temos que $c > a$, então $e > 1$, ou seja, a excentricidade é maior que 1.

Observação 4.2. Quando mantemos fixo o eixo focal e fazemos A_1 tender à F_1 e A_2 à F_2 , temos que a excentricidade tenderá para 1. Assim, b tenderá para zero e a hipérbole se degenera em duas semirretas de sentidos contrários, sem pontos de interseção, com origens nos focos e com reta suporte F_1F_2 . ■

Observação 4.3. Quando mantemos fixo o eixo focal e fazemos os vértices A_1 e A_2 tenderem a O , a excentricidade tenderá ao infinito. Temos que a hipérbole se degenera segundo uma reta que será a mediatriz de F_1F_2 conforme a figura 35.



Diretrizes

Proposição 4.3. As equações das retas diretrizes da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ são $x = -\frac{a}{e}$ e $x = \frac{a}{e}$.

Demonstração: Pela figura 34, temos que $d(O, d) + d(d, A_1) = d(O, A)$, então $d(O, d) = \frac{c-a}{e} + \frac{c}{e} = \frac{a}{e}$. Logo a distância entre o centro e as diretrizes é $\frac{a}{e}$, então as equações das diretrizes serão $x = -\frac{a}{e}$ e $x = \frac{a}{e}$. ■

Assintotas da hipérbole

Proposição 4.4. As retas $y = \pm \frac{b}{a}x$ são assintotas da hipérbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Demonstração: Sendo a equação de uma hipérbole da forma $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, temos que isolando y , ficamos com $y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \Rightarrow y = \pm \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$.

Quando x tende para o infinito o radical $\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$ tende para 1. Logo teremos que as assintotas serão $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$. ■

Simetria da Hipérbole

Teorema 4.1. A Hipérbole é simétrica em relação à:

- a) Reta focal.
- b) Reta não focal.
- c) Ao centro.

Demonstração: a) Se $P = (x, y)$ pertence à hipérbole, temos pelo resultado anterior

que:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se P' é simétrico a P em relação à reta focal, então $P' = (x, -y)$. Como

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Temos que P' pertence a hipérbole. Logo, há simetria em relação à reta focal.

b) Se P'' é simétrico a P em relação a reta não focal, então $P'' = (-x, y)$, como

$$\frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Então, P'' pertence a hipérbole. Logo, há simetria em relação à reta não focal.

c) Se P^* é simétrico a P em relação a origem, então $P^* = (-x, -y)$, como

$$\frac{(-x)^2}{a^2} - \frac{(-y)^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

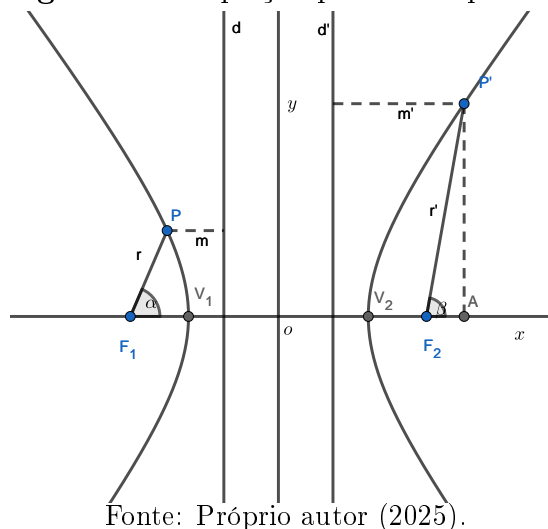
Então, P^* pertence a hipérbole. Logo, há simetria em relação à origem. ■

Equação Polar

Vamos encontrar as equações polares de quando o eixo polar corta a diretriz e de quando não corta como mostra a figura 36.

Dado uma hipérbole de focos F_1 e F_2 , vértices V_1 e V_2 e centro O . As retas diretrizes dessa hipérbole serão d e d' e as distâncias de P até d e d' são respectivamente m e m' . Tendo como as distâncias do centro até o focos e até os vértices c e a respectivamente.

Figura 36 – Equação polar da hipérbole



1º caso: quando o eixo polar corta a diretriz.

Sem perda de generalidade, podemos considerar um ponto P pertencente ao ramo es-

querdo da hipérbole, tal que a semirreta $\overrightarrow{F_1P}$ corta a diretriz d . Sendo o ângulo $\widehat{PF_1V_1} = \alpha$ e $\overline{F_1P} = r$.

Pela figura 36 acima, temos que

$$r \cos(\alpha) + m = c - a + \frac{c - a}{e}.$$

Pela relação da excentricidade, $e = \frac{r}{m} \Rightarrow m = \frac{r}{e}$.

Logo,

$$\begin{aligned} r \cos(\alpha) + \frac{r}{e} &= c - a + \frac{c - a}{e} \\ r e \cos(\alpha) + r &= ce - ae + c - a. \end{aligned}$$

Como $e = \frac{c}{a}$

$$\begin{aligned} r(1 + e \cos(\alpha)) &= c \cdot \frac{c}{a} - a \cdot \frac{c}{a} + c - a \\ r(1 + e \cos(\alpha)) &= \frac{c^2}{a} - a \\ r(1 + e \cos(\alpha)) &= \frac{c^2 - a^2}{a}. \end{aligned}$$

Pela igualdade, $c^2 - a^2 = b^2$ concluimos que

$$r = \frac{b^2}{a(1 + e \cos(\alpha))}.$$

2º caso: quando o eixo polar não corta a diretriz.

Podemos considerar um ponto P' pertencente ao ramo direito da hipérbole, tal que a semirreta $\overrightarrow{F_1P'}$ não corta a diretriz d' . Sendo o ponto A a projeção de P' sobre o eixo x , temos o ângulo $\widehat{P'F_2A} = \beta$ e $\overline{F_2P'} = r'$.

Pela figura 36, temos que

$$c + r' \cos(\beta) = m' + a - \frac{c - a}{e}.$$

Pela relação da excentricidade $e = \frac{r'}{m'} \Rightarrow m' = \frac{r'}{e}$.

Logo, $c + r' e \cos(\beta) = \frac{r'}{e} + a - \frac{c - a}{e}$

$$\begin{aligned} ce + er' \cos(\beta) &= r' + ae - c + a \\ r' - r' e \cos(\beta) &= ce - ae + c - a. \end{aligned}$$

Como $e = \frac{c}{a}$

$$\begin{aligned} r'(1 - e \cos(\beta)) &= c \cdot \frac{c}{a} - a \cdot \frac{c}{a} + c - a \\ r'(1 - e \cos(\beta)) &= \frac{c^2}{a} - a \\ r'(1 - e \cos(\beta)) &= \frac{c^2 - a^2}{a}. \end{aligned}$$

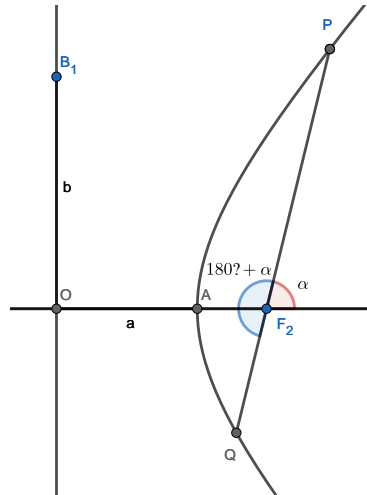
Pela igualdade, $c^2 - a^2 = b^2$

$$r' = \frac{b^2}{a(1 - e\cos(\beta))}.$$

Latus Rectum

Teorema 4.2. *O comprimento da corda focal mínima é $\frac{2b^2}{a}$.*

Figura 37 – Latus rectum hipérbole



Fonte: Próprio autor (2025).

Demonstração: Para a equação $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, sendo PQ uma corda focal desta hipérbole, ou seja, P e Q pertencem a mesma, como vemos na figura 37. Sendo F o foco em que PQ passa, temos que $\overline{PQ} = \overline{PF} + \overline{FQ}$.

Utilizando a equação polar, temos que

$$\overline{PF} = \frac{b^2}{a(1 - e\cos(\alpha))}$$

$$\overline{QF} = \frac{b^2}{a(1 - e\cos(\alpha + 180^\circ))} = \frac{b^2}{a(1 + e\cos(\alpha))}.$$

Logo

$$\overline{PQ} = \overline{PF} + \overline{FQ} = \frac{b^2}{a(1 - e\cos(\alpha))} + \frac{b^2}{a(1 + e\cos(\alpha))}$$

e portanto

$$\overline{PQ} = \frac{b^2}{a} \left(\frac{1 - \cos(\alpha) + 1 + \cos(\alpha)}{(1 + \cos(\alpha))(1 - \cos(\alpha))} \right) = \frac{2b^2}{a(1 - \cos^2(\alpha))}.$$

Para o comprimento ser mínimo, o valor de $1 - \cos^2\alpha$ deve ser máximo, logo $\alpha = 90^\circ$.

Onde resultará em $PQ = \frac{2b^2}{a}$. ■

Equação quadrática da hipérbole

Ao analisar a equação canônica da hipérbole centrada no ponto (x_0, y_0) e reta

focal paralela ao eixo OX :

$$\mathcal{H} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Escrevendo os quadrados como trinômios e depois multiplicando ambos os lados por a^2b^2 , poderemos reescrever a equação da seguinte forma:

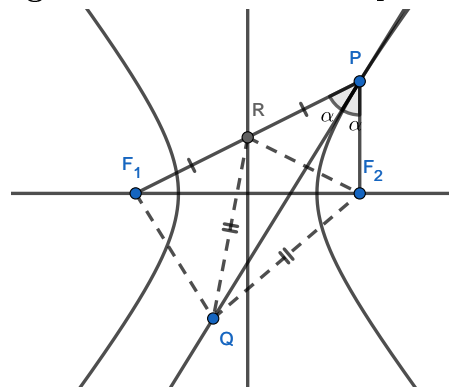
$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2b^2x_0x + 2a^2y_0y + b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0.$$

Ao comparar com a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, temos que $A = b^2$, $B = 0$, $C = -a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = 2a^2y_0$ e $F = b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2$. Onde os coeficientes tem sinais opostos.

4.2 PROPRIEDADES ÓPTICAS

Teorema 4.3. (*Princípio de reflexão das hipérbol*) Seja P um ponto de uma hipérbole \mathcal{H} de focos F_1 e F_2 . A reta tangente a \mathcal{H} em P é a bissetriz do ângulo $\widehat{F_1PF_2}$.

Figura 38 – Reflexão da hipérbole



Fonte: Próprio autor (2025).

Demonstração: Seja t a bissetriz do ângulo $\angle F_1PF_2$, com P pertencente à hipérbole de focos F_1 e F_2 , como mostra a figura 38. Seja R um ponto em F_1P , tal que $PR = PF_2$, temos que t é a mediatriz do segmento RF_2 , logo

$$|\overline{F_1P} - \overline{RP}| = |\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| = \overline{F_1R} = 2a.$$

Sendo Q um ponto da reta t distinto de P . Como t é a mediatriz de RF_2 , temos que $\overline{RQ} = \overline{QF_2}$. Utilizando a desigualdade triangular no triângulo $\triangle F_1RQ$, teremos que

$$\begin{aligned} \overline{QR} &< \overline{F_1Q} + \overline{F_1R} \text{ e } \overline{F_1Q} < \overline{F_1R} + \overline{QR} \\ \overline{QR} - \overline{F_1R} &< \overline{F_1Q} \text{ e } \overline{F_1Q} < \overline{F_1R} + \overline{QR} \\ \overline{QR} - \overline{F_1R} &< \overline{F_1Q} < \overline{F_1R} + \overline{QR} \\ -\overline{F_1R} &< \overline{F_1Q} - \overline{QR} < \overline{F_1R} \\ |\overline{F_1Q} - \overline{QR}| &< \overline{F_1R} = 2a. \end{aligned}$$

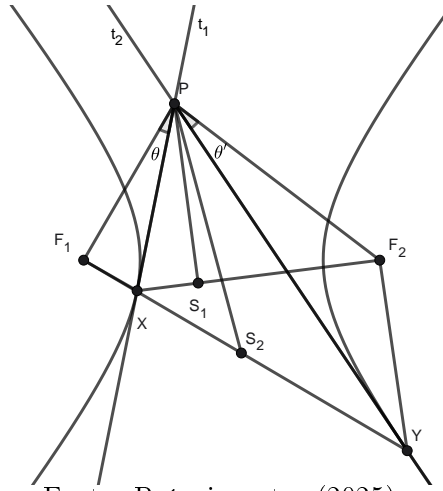
Conclui-se, portanto, que o ponto Q não pertence à hipérbole. Desde que pode assumir qualquer ponto da reta t distinto de P , segue que P é o único ponto de t que pertence à hipérbole, ou seja, t é tangente à hipérbole no ponto P . ■

Teorema 4.4. (Poncelet) *Seja P um ponto exterior a uma hipérbole \mathcal{H} de focos F_1 e F_2 com eixo focal medindo $2a$. Sejam t_1 e t_2 as retas tangentes a \mathcal{H} que passam por P e X e Y seus respectivos pontos de tangência, teremos que:*

$$\angle F_1PX = \angle F_2PY.$$

Demonstração: Seja S_1 o ponto simétrico de F_1 em relação à reta t_1 e S_2 o ponto simétrico de F_2 em relação à reta t_2 como vemos na figura 39. Temos que os triângulos $\triangle PF_1S_1$ e $\triangle PF_2S_2$ são isósceles e conseqüentemente $\angle S_1PX = \angle F_1PX = \theta$ e $\angle S_2PY = \angle F_2PY = \theta'$ e também $\overline{PF_1} = \overline{PS_1}$ e $\overline{PF_2} = \overline{PS_2}$.

Figura 39 – Poncelet - Hipérbole



Fonte: Próprio autor (2025).

Pelo teorema das tangentes temos que:

$$\angle F_1XP = \angle S_1XP \Rightarrow X, S_1 \text{ e } F_2 \text{ são colineares}$$

e

$$\angle F_2YP = \angle S_2YP \Rightarrow Y, S_2 \text{ e } F_1 \text{ são colineares.}$$

Sabemos que

$$\overline{F_2X} = \overline{S_1X} + \overline{S_1F_2} \Rightarrow \overline{F_2X} - \overline{F_1X} = \overline{S_1X} + \overline{S_1F_2} - \overline{F_1X}.$$

Sendo $\overline{F_1X} = \overline{S_1X}$, temos que

$$\overline{F_2X} - \overline{F_1X} = \overline{S_1F_2} = 2a.$$

Sabemos que

$$\overline{F_1Y} = \overline{S_2Y} + \overline{S_2F_1} \Rightarrow \overline{F_1Y} - \overline{F_2Y} = \overline{S_2Y} + \overline{S_2F_1} - \overline{F_2Y}.$$

Sendo $\overline{F_2Y} = \overline{S_2Y}$, temos que

$$\overline{F_1Y} - \overline{F_2Y} = \overline{S_2F_1} = 2a.$$

Temos que os triângulos $\triangle PF_1S_2$ é congruente a $\triangle PF_2S_1$ e logo $2\theta + \angle S_1PS_2 = 2\theta' + \angle S_1PS_2 \Rightarrow \theta = \theta'$. ■

4.3 APLICAÇÕES

Torre de Resfriamento

Estas estruturas são frequentemente utilizadas em usinas nucleares e termelétricas. Devido ao seu formato aerodinâmico, o ar quente sobe mais rapidamente pela parte central, que é mais estreita, e na saída o ar se expande, reduzindo a pressão e criando um vácuo parcial, puxando o ar frio pela base. A torre de resfriamento tem resistência estrutural elevada, pois consegue distribuir as tensões mais uniformemente. Outra vantagem é a cintura estreita no centro, que permite a redução de custos na sua construção, pois não precisa de escoramentos internos, como vemos na figura 40.

Figura 40 – Torre hiperbólica

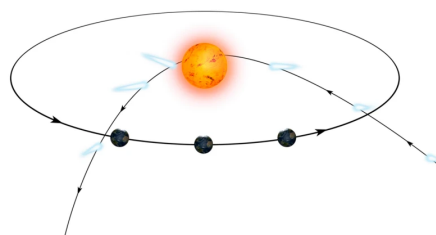


Fonte: Torretelli 2025 (2025)

Cometas Hiperbólicos

Um cometa que possui órbita hiperbólica é aquele que segue uma trajetória de hipérbole e, como está não é uma curva fechada, não temos uma periodicidade do objeto, que após passar perto do sol não retorna ao sistema solar, como vemos na figura 41. A velocidade de escape deste cometa está ligada a excentricidade de sua órbita e como esta é maior que 1, o objeto não fica aprisionado pela gravidade solar. Após ser ejetado do sistema solar, estes cometas se tornam viajantes do espaço interplanetário.

Figura 41 – Órbita hiperbólica



Fonte: Martins (2019)

5 PARÁBOLA

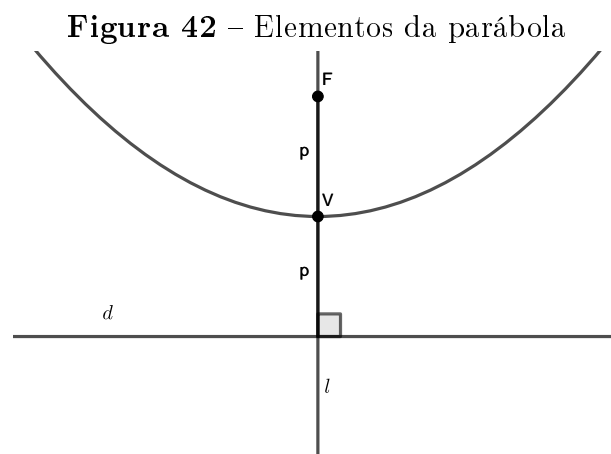
As aplicações dos conhecimentos sobre parábolas são de grande utilidade no nosso cotidiano, aonde estas vão de um simples acender de uma lâmpada que ilumina certo ambiente até o recebimento de um sinal de uma antena nos lugares mais remotos. Neste capítulo estudaremos propriedades que a parábola compartilha com as demais cônicas e também certas particularidades que esta curva tem.

5.1 DEFINIÇÃO E PROPRIEDADES

Na mesma ideia das demais, a definição a seguir foi motivada pela Proposição 2.8 que faz parte do conjunto de resultados idealizados por Dandelin.

Definição 5.1. Sejam d uma reta e F um ponto do plano não pertencente a d . A parábola \mathcal{P} de foco F e diretriz d é o conjunto dos pontos do plano cuja distância a F é igual à sua distância a d :

$$\mathcal{P} = \{P \mid d(P, F) = d(P, d)\}.$$



Fonte: Próprio autor (2025).

Elementos da parábola

Como vemos na figura 42.

- A reta focal l da parábola \mathcal{P} é a reta perpendicular a diretriz e passa pelo o foco.
- O ponto V é o vértice da parábola, onde este é a interseção da parábola com a reta foca.
- O parâmetro da parábola é o número $2p = d(F, d)$, onde podemos notar que $d(V, F) = d(V, d)$.

Condição de existência da parábola

Para existir uma parábola, é necessária e suficiente que o foco seja exterior à diretriz, pois caso contrário os únicos pontos equidistantes dos dois seriam os pertencentes à reta perpendicular a ela, traçada pelo foco, ou seja, não existiria a curva.

Um ponto Q é considerado interior à parábola se, para qualquer reta que liga o foco ao ponto Q essa reta intersecta a parábola em um ponto P de forma que Q esteja entre o foco e P . Caso contrário, se for exterior, o ponto P estará entre o foco e Q .

Proposição 5.1. *Seja uma parábola \mathcal{P} com foco F e diretriz d . Sendo Q um ponto do plano, temos que:*

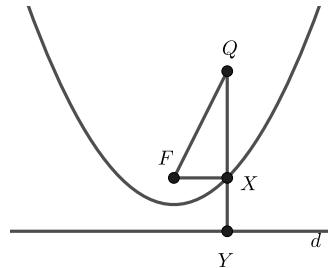
(a) *Se Q é interior a \mathcal{P} , então $d(Q, F) < d(Q, d)$.*

(b) *Se Q é exterior a \mathcal{P} , então $d(Q, F) > d(Q, d)$.*

Demonstração: a) Sendo o ponto Y a projeção ortogonal de Q sobre d e X o ponto de interseção de \overline{QY} com \mathcal{P} . Utilizando a desigualdade triangular no triângulo $\triangle QXF$, como vemos na figura 43, teremos que

$$\overline{FQ} < \overline{QX} + \overline{FX}.$$

Figura 43 – Ponto interno da parábola



Fonte: Próprio autor (2025).

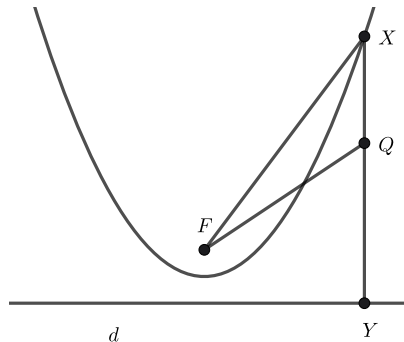
Pela definição da parábola, $\overline{FX} = \overline{XY}$, logo

$$\overline{FQ} < \overline{QX} + \overline{XY} = \overline{QY}.$$

b) Sendo o ponto Y a projeção ortogonal de Q sobre d e X o ponto de \mathcal{P} , tal que $Q \in \overline{XY}$. Utilizando a desigualdade triangular no triângulo $\triangle QXF$, como vemos na figura 44, teremos que

$$\overline{FX} < \overline{FQ} + \overline{XQ}.$$

Figura 44 – Ponto externo da parábola



Fonte: Próprio autor (2025).

Pela definição da parábola, $\overline{FX} = \overline{XY}$, logo

$$\begin{aligned}\overline{XY} &< \overline{FQ} + \overline{XQ} \\ \overline{XQ} + \overline{QY} &< \overline{FQ} + \overline{XQ} \\ \overline{QY} &< \overline{FQ}.\end{aligned}$$

■

Forma canônica da parábola

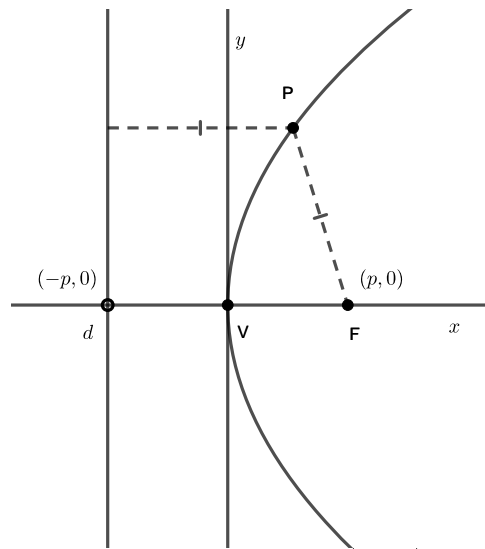
Encontraremos a equação da parábola com vértice na origem.

1º caso: reta focal sendo o eixo OX e o foco à direita da diretriz.

Sendo o vértice de coordenadas $V = (0, 0)$, foco $F = (p, 0)$ e a diretriz á reta $d : x = -p$, onde $2p = d(F, d)$ de acordo com a figura 45, então,

$$\begin{aligned}P = (x, y) \in \rho &\Leftrightarrow d(P, F) = d(P, d) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x - p)^2 + y^2} = |x + p| \\ &\Leftrightarrow (x - p)^2 + y^2 = (x + p)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 \\ &\Leftrightarrow -2px + y^2 = 2px \\ &\Leftrightarrow y^2 = 4px.\end{aligned}$$

Figura 45 – 1º caso da forma canônica da parábola



Fonte: Próprio autor (2025).

2º Caso: reta focal sendo o eixo OX e o foco à esquerda da diretriz.

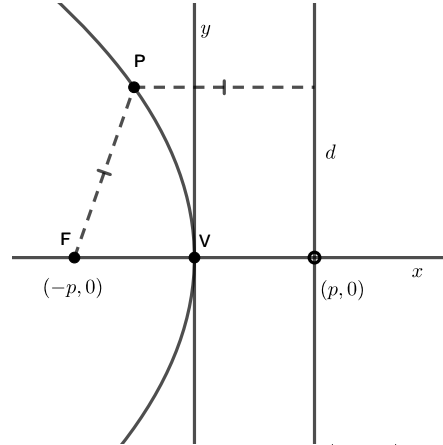
Sendo o vértice de coordenadas $V = (0, 0)$, foco $F = (-p, 0)$ e a diretriz á reta $d : x = p$, onde $2p = d(F, d)$ de acordo com a figura 46, então,

$$\begin{aligned}P = (x, y) \in \rho &\Leftrightarrow d(P, F) = d(P, d) \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(x + p)^2 + y^2} = |x - p| \\ &\Leftrightarrow (x + p)^2 + y^2 = (x - p)^2 \\ &\Leftrightarrow x^2 + 2px + p^2 + y^2 = x^2 - 2px + p^2\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow 2px + y^2 = -2px$$

$$\Leftrightarrow y^2 = -4px.$$

Figura 46 – 2º caso da forma canônica da parábola



Fonte: Próprio autor (2025).

3º Caso: reta focal sendo o eixo OY e o foco acima da diretriz.

Sendo o vértice de coordenadas $V = (0, 0)$, foco $F = (0, p)$ e a diretriz à reta $d : y = -p$, onde $2p = d(F, d)$ de acordo com a figura 47, então,

$$P = (x, y) \in \rho \Leftrightarrow d(P, F) = d(P, d)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - p)^2} = |y + p|$$

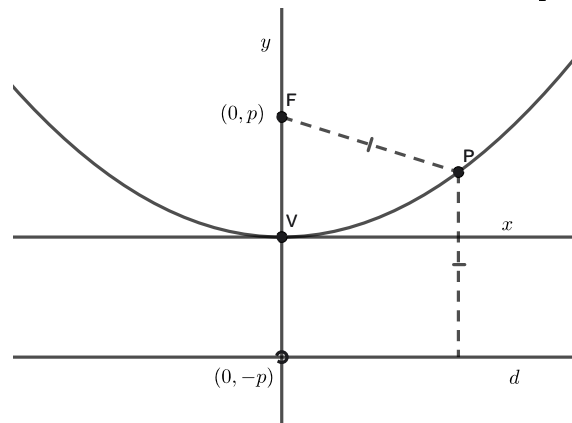
$$\Leftrightarrow x^2 + (y - p)^2 = (y + p)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$$

$$\Leftrightarrow -2py + x^2 = 2py$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4py.$$

Figura 47 – 3º caso da forma canônica da parábola



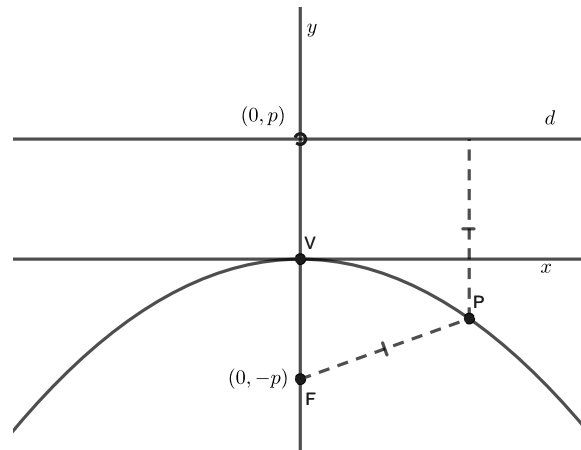
Fonte: Próprio autor (2025).

4º Caso: reta focal sendo o eixo OY e o foco abaixo da diretriz.

Sendo o vértice de coordenadas $V = (0, 0)$, foco $F = (0, -p)$ e a diretriz à reta $d : y = p$, onde $2p = d(F, d)$ de acordo com a figura 48, então,

$$\begin{aligned}
P = (x, y) \in \rho &\Leftrightarrow d(P, F) = d(P, d) \\
&\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y + p)^2} = |y - p| \\
&\Leftrightarrow x^2 + (y + p)^2 = (y - p)^2 \\
&\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2py + p^2 = y^2 - 2py + p^2 \\
&\Leftrightarrow 2py + x^2 = -2py \\
&\Leftrightarrow x^2 = -4py.
\end{aligned}$$

Figura 48 – 4º caso da forma canônica da parábola



Fonte: Próprio autor (2025).

Equação canônica da parábola transladada

Como fizemos nos casos da elipse e da hipérbole, transladaremos a parábola até que o seu vértice esteja em (x_0, y_0) . Vamos considerar o sistema de eixos ortogonais \overline{OXY} com origem $\overline{O} = V = (x_0, y_0)$ e com eixos \overline{OX} e \overline{OY} , onde estes têm a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos OX e OY , respectivamente.

1º Caso: O foco está à direita da diretriz d .

Sendo o foco $F = (x_0 + p, y_0)$, diretriz $d : x = x_0 - p$ e reta focal $y = y_0$.

Temos $P = (x, y) = (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$ pertencente a parábola, então

$$\begin{aligned}
d(P, F) = d(P, d) &\Leftrightarrow \sqrt{(\bar{x} - p)^2 + \bar{y}^2} = |\bar{x} + p| \\
&\Leftrightarrow (\bar{x} - p)^2 + \bar{y}^2 = (\bar{x} + p)^2 \\
&\Leftrightarrow \bar{y}^2 = 4p\bar{x} \\
&\Leftrightarrow (y - y_0)^2 = 4p(x - x_0).
\end{aligned}$$

2º Caso: O foco está à esquerda da diretriz d .

Sendo o foco $F = (x_0 - p, y_0)$, diretriz $d : x = x_0 + p$ e reta focal $y = y_0$.

Temos $P = (x, y) = (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$ pertencente à parábola, então

$$\begin{aligned}
d(P, F) = d(P, d) &\Leftrightarrow \sqrt{(\bar{x} + p)^2 + \bar{y}^2} = |\bar{x} - p| \\
&\Leftrightarrow (\bar{x} + p)^2 + \bar{y}^2 = (\bar{x} - p)^2 \\
&\Leftrightarrow \bar{y}^2 = -4p\bar{x}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (y - y_0)^2 = -4p(x - x_0).$$

3º Caso: O foco está acima da diretriz d .

Sendo o foco $F = (x_0, y_0 + p)$, diretriz $d : y = y_0 - p$ e reta focal $x = x_0$

Temos $P = (x, y) = (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$ pertencente à parábola, então

$$\begin{aligned} d(P, F) = d(P, d) &\Leftrightarrow \sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y} - p)^2} = |\bar{y} + p| \\ &\Leftrightarrow \bar{x}^2 + (\bar{y} - p)^2 = (\bar{y} + p)^2 \\ &\Leftrightarrow \bar{x}^2 = 4p\bar{y} \\ &\Leftrightarrow (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0). \end{aligned}$$

4º Caso: O foco está abaixo da diretriz d .

Sendo o foco $F = (x_0, y_0 - p)$, diretriz $d : y = y_0 + p$ e reta focal $x = x_0$

Temos $P = (x, y) = (\bar{x} + x_0, \bar{y} + y_0)$ pertencente à parábola, então

$$\begin{aligned} d(P, F) = d(P, d) &\Leftrightarrow \sqrt{\bar{x}^2 + (\bar{y} + p)^2} = |\bar{y} - p| \\ &\Leftrightarrow \bar{x}^2 + (\bar{y} + p)^2 = (\bar{y} - p)^2 \\ &\Leftrightarrow \bar{x}^2 = -4p\bar{y} \\ &\Leftrightarrow (x - x_0)^2 = -4p(y - y_0). \end{aligned}$$

Regiões do plano determinadas por uma parábola

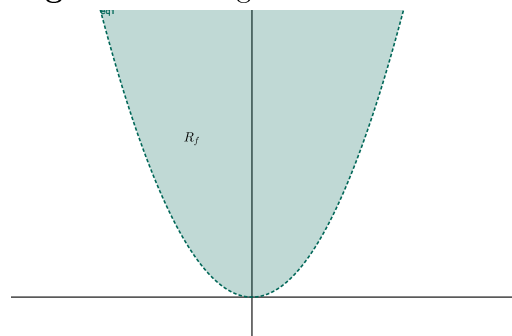
Dada uma parábola \mathcal{P} , temos que está divide o plano em três subconjuntos disjuntos que são: a própria curva parabólica, a região que contém os pontos internos ou também conhecida por região focal denominada por R_f e a região que contém os pontos externos que podemos chamar de região não focal denominada por R_{nf} .

No caso da parábola temos quatro possíveis posições de análise. Sem perda de generalidade, analisaremos o terceiro caso da equação canônica, ou seja, $V = (x, y)$ e reta focal coincidente com o eixo OY ,

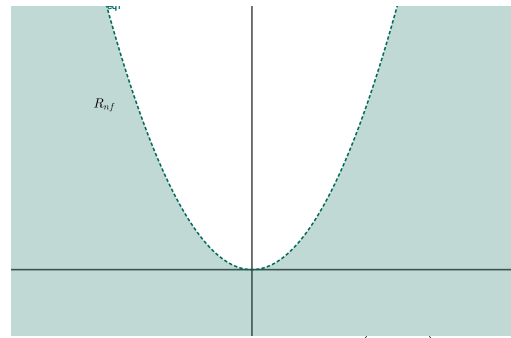
$$x^2 = 4py.$$

Vamos analisar as possíveis relações algébricas dos pontos de R_f e de R_{nf} de uma parábola do tipo $x^2 = 4py$, conforme as figura 49 e 50.

Figura 49 – Região focal - Parábola



Fonte: Próprio autor (2025).

Figura 50 – Região não focal - Parábola

Fonte: Próprio autor (2025).

Se $P \in R_f$, temos que $d(P, F) < d(P, d)$, onde d é a diretriz. Utilizando os mesmos passos da forma canônica, chegaremos à relação: $x^2 < 4py$.

Se $P \in R_{nf}$, temos que $d(P, F) > d(P, d)$, onde d é a diretriz. Utilizando os mesmos passos da forma canônica, chegaremos à relação: $x^2 > 4py$.

Observação 5.1. Pela definição de parábola, a distância até a diretriz é igual à distância até o foco, logo teremos que a excentricidade será 1.

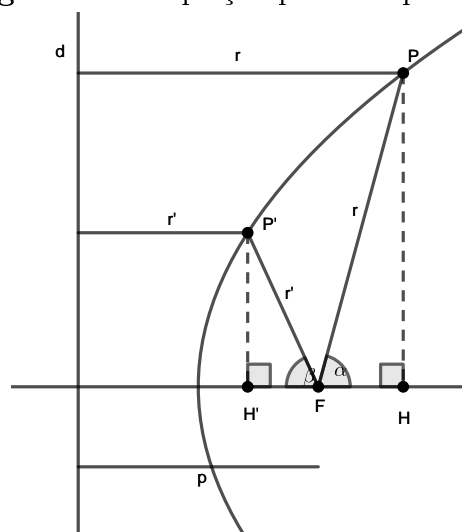
Simetria da parábola

Teorema 5.1. *Toda parábola é simétrica em relação à sua reta focal.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, analisaremos o 1º caso da equação canônica. Se $P = (x, y) \in \mathcal{P}$, temos que provar $P' = (x, -y) \in \mathcal{P}$, pois o eixo de simetria neste caso é OX . Como $(-y)^2 = y^2 = 4px$, pela equação canônica $P' \in \mathcal{P}$. ■

Equação Polar

Vamos encontrar as equações polares de quando o eixo polar corta a diretriz e de quando não corta, como vemos na figura 51.

Figura 51 – Equação polar da parábola

Fonte: Próprio autor (2025).

Dada a parábola \mathcal{P} de foco F e diretriz d . Sendo p a distância do foco até a diretriz d . Consideremos um sistema de coordenadas polares formado por um semi-eixo e com foco coincidindo com o foco da parábola.

1º caso: quando o eixo polar não corta a diretriz d . Neste caso, temos o ponto P , tal que a semirreta \overrightarrow{FP} não toca a diretriz d e $\overline{PF} = r$. Sendo H a projeção de P sobre o eixo focal e o ângulo $\widehat{HFP} = \alpha$.

Pela figura 51 acima, temos que $\overline{HF} = r \cos(\alpha)$ e $d(P, d) = \overline{HF} + d(F, d)$, logo

$$r = r \cos(\alpha) + p \Rightarrow r = \frac{p}{1 - \cos(\alpha)}.$$

2º Caso: Quando eixo polar corta a diretriz d . Já neste caso, temos o ponto P' , tal que a semirreta $\overrightarrow{FP'}$ toca a diretriz d em algum ponto e $\overline{P'F} = r'$. Sendo H' a projeção de P' sobre o eixo focal e o ângulo $\widehat{H'FP'} = \beta$.

Pela figura 51 acima, temos que $\overline{H'F} = r' \cos(\beta)$ e $d(F, d) = d(P', d) + \overline{H'F}$, logo

$$p = r' + r' \cos(\beta) \Rightarrow r' = \frac{p}{1 + \cos(\beta)}.$$

Latus Rectum

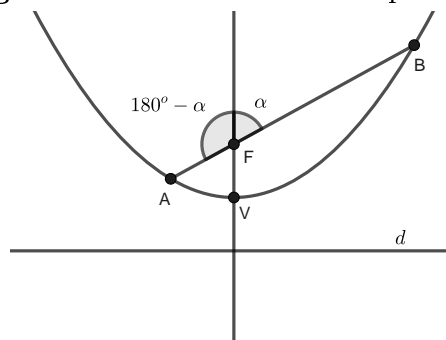
Teorema 5.2. *A corda focal mínima da parábola mede $2p$, onde p é a medida do parâmetro.*

Demonstração: Dada a a parábola \mathcal{P} de foco F e parâmetro medindo p , consideremos a corda focal AB , logo temos que $\overline{AB} = \overline{AF} + \overline{FB}$.

Utilizando a forma polar e observando a figura 52,

$$\overline{FA} = \frac{p}{1 + \cos(\alpha)} \text{ e } \overline{FB} = \frac{p}{1 - \cos(\alpha)}.$$

Figura 52 – Lactum rectum - parábola



Fonte: Próprio autor (2025).

Logo

$$\overline{AB} = \frac{p}{1 + \cos(\alpha)} + \frac{p}{1 - \cos(\alpha)} = \frac{2p}{1 - \cos^2(\alpha)},$$

onde para que \overline{AB} seja mínimo, $1 - \cos^2(\alpha)$ dever ser máximo, então $\alpha = 90^\circ$. Logo, $\overline{AB} = 2p$. ■

Equação quadrática da parábola

Ao analisar a equação canônica da parábola de vértice $V = (x_0, y_0)$ e com reta focal paralela ao eixo OX :

$$\mathcal{P} : (y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0).$$

Escrevendo os quadrados como trinômios e depois reagrupando, poderemos escrever a equação da seguinte forma:

$$y^2 \mp 4py - 2y_0y + y_0^2 \pm 4px_0 = 0.$$

Ao comparar com a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, temos que $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$, $D = \mp 4p$, $E = -y_0$ e $F = y_0^2 \pm 4px_0$.

Analogamente, se analisarmos a equação canônica de vértice $V = (x_0, y_0)$ e com reta focal paralela ao eixo OY :

$$\mathcal{P} : \pm 4p(y - y_0) = (x - x_0)^2.$$

Escrevendo os quadrados como trinômios e depois reagrupando, poderemos escrever a equação da seguinte forma:

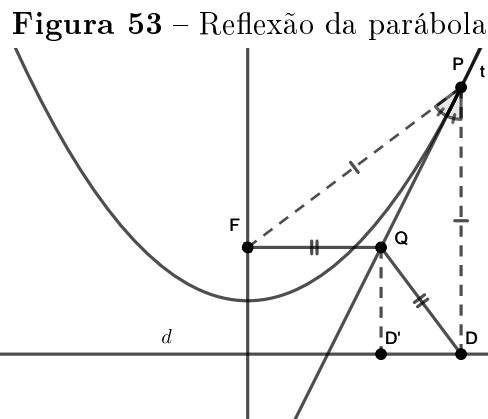
$$x^2 - 2x_0x \mp 4py + x_0^2 \pm 4py_0 = 0.$$

Ao comparar com a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, temos que $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -2x_0$, $E = \mp 4p$ e $F = x_0^2 \pm 4py_0$.

5.2 PROPRIEDADES ÓPTICAS

Teorema 5.3. (*Propriedade refletora da parábola*) Seja P um ponto de uma parábola \mathcal{P} de foco F e diretriz d . A reta tangente a \mathcal{P} em P é a bissetriz do ângulo \widehat{FPD} , onde D é a projeção de P sobre a diretriz.

Demonstração: Traçando a bissetriz t do ângulo \widehat{FPD} . Tomemos Q sobre a reta t , um ponto distinto de P . Seja D' a projeção de Q sobre a diretriz. Como P pertence, temos que $\overline{PF} = \overline{PD}$, logo o triângulo $\triangle FPD$ é isósceles. Então, a reta t é mediatriz do segmento \overline{FD} , ou seja, $\overline{FQ} = \overline{QD}$, de acordo com a figura 53.



Fonte: Próprio autor (2025).

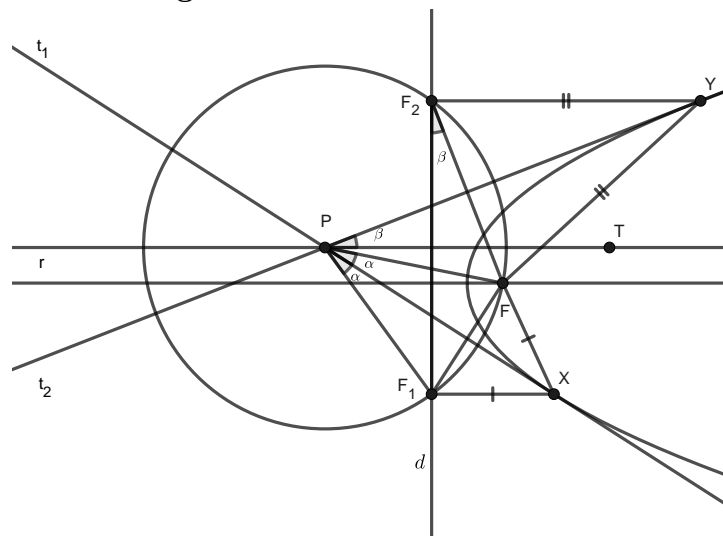
Sendo D' a projeção de Q sobre a diretriz d , temos que $\overline{QD'} < \overline{QD} = \overline{QF}$, logo Q não pertence à parábola \mathcal{P} . Como Q é um ponto qualquer sobre a reta t e distinto de P , logo concluímos que P é o único ponto da reta t que pertence à parábola \mathcal{P} , então t é tangente a \mathcal{P} no ponto P . ■

Teorema 5.4. (Poncelet) *Seja P um ponto exterior à parábola \mathcal{P} cujo foco é o ponto F , onde r é a reta paralela ao eixo de simetria que passa P . Seja t_1 e t_2 as retas tangentes a \mathcal{P} que passam por P e X e Y seus respectivos pontos de tangência. Sendo T um ponto sobre r e interior a \mathcal{P} , teremos que: $\angle XPF = \angle YPT$.*

Demonstração: Sendo $\angle XPF = \alpha$ e $\angle YPT = \beta$. Marcando F_1 e F_2 os simétricos a F em relação às retas t_1 e t_2 , respectivamente.

Notemos que o ponto P é o encontro das mediatrizes dos segmentos FF_1 e FF_2 , logo P é circuncentro do triângulo $\triangle FF_1F_2$, de acordo com a figura 54. Temos que PY é mediatriz do segmento FF_2 , logo o triângulo $\triangle F_2PY$ é isósceles e com isso, PY é a bissetriz do $\angle F_2PY$. Como $\overline{FY} = \overline{F_2Y}$, pelo teorema das tangentes, temos que YF_2 é tangente à diretriz e logo F_2 pertence à diretriz.

Figura 54 – Poncelet - Parábola



Fonte: Próprio autor (2025).

Usando o fato de PX ser mediatriz do segmento FF_1 , segue que o triângulo $\triangle F_1PX$ é isósceles e com isso, PX é a bissetriz do $\angle F_1PX$. Sendo $\overline{FX} = \overline{F_1X}$, pelo teorema das tangentes, segue que XF_1 é tangente à diretriz e logo F_1 pertence a diretriz.

Como F_1 e F_2 pertencem à diretriz, logo a reta F_1F_2 será perpendicular a reta r . Sendo $\angle YPT = \beta$, por semelhança de triângulos $\angle F_2PY = \beta$. Traçando a circunferência C de centro P e raio PF_1 , pelo que vimos antes, F e F_2 pertencem a C . Temos que $\widehat{F_1F_2F}$ é ângulo inscrito com arco F_1F e também $\widehat{F_1PF}$ é ângulo central de arco F_1F , então $2\alpha = 2\beta \Rightarrow \alpha = \beta$. ■

5.3 APLICAÇÕES

Antena parabólica

A antena parabólica é um dispositivo muito utilizado na zona rural brasileira para captação de sinais de telecomunicação, como TV por satélite, internet banda larga e transmissões de rádio. Sua estrutura parabólica permite captar melhor os sinais eletromagnéticos, pois pelo princípio de reflexão da curva, podemos concentrar os sinais recebidos no foco onde está localizado o receptor, como vemos na figura 55.

Figura 55 – Antena parabólica



Fonte: RNews (2024)

Fogão solar parabólico

O fogão solar parabólico é um instrumento que se baseia no princípio da reflexão para utilizar energia proveniente do Sol para cozinhar alimentos, ferver água ou até mesmo derreter metais, tudo isso de forma sustentável e sem consumo de combustíveis tradicionais. Sua eficiência se deve ao formato parabólico, que concentra os raios solares em um único ponto (o foco), gerando altas temperaturas, como vemos na figura 56.

Figura 56 – Fogão solar parabólico



Fonte: Territorio Secreto (2025)

6 CLASSIFICAÇÃO DE CÔNICAS

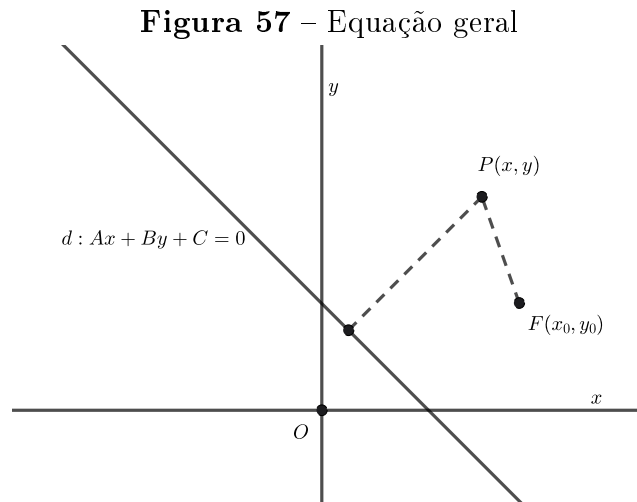
Neste capítulo, classificaremos as cônicas estudadas através dos coeficientes de suas equações, de onde extrairemos informações importantes sobre formas e possíveis degenerações. Os invariantes, que estudaremos neste capítulo, têm um papel importante para classificar cônicas de eixos não paralelos aos eixos coordenados.

6.1 CLASSIFICAÇÃO POR COEFICIENTES

Utilizando a definição geral dada por Dandelin, encontraremos a seguir a forma geral das cônicas em \mathbb{R}^2 .

Seja uma cônica de foco $F(x_0, y_0)$ e com diretriz a reta normal $d : x \cos(\alpha) + y \sin(\alpha) = p$, de acordo com a figura 57.

Seja $P(x, y)$ um ponto da cônica e onde e será sua excentricidade da curva.



Fonte: Próprio autor (2025).

Pela definição, temos:

$$\frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}} = e.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado e reorganizando ficaremos com

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \frac{e^2}{A^2 + B^2} (Ax + By + C)^2.$$

Seja $\frac{e^2}{A^2 + B^2} = k^2$, temos:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (kAx + kB y + kC)^2 = 0.$$

Fazendo $kA = l, kB = m$ e $kC = n$, segue que:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (lx + my + n)^2 = 0.$$

Esta equação é denominada equação focal, onde $F(x_0, y_0)$ é o foco e a reta

diretriz é $lx + my + n = 0$. Posteriormente, utilizaremos a relação acima para determinar analiticamente os focos e diretrizes de uma cônica.

Desenvolvendo os quadrados e reorganizando, temos que

$$(1 - l^2)x^2 - lmxy + (1 - m^2)y^2 - 2(x_0 + ln)x - 2(y_0 + mn)y + x_0^2 + y_0^2 - n^2 = 0.$$

Fazendo,

$$\begin{aligned} A &= 1 - l^2, \\ B &= -lm, \\ C &= 1 - m^2, \\ D &= -2(x_0 + ln), \\ E &= -2(y_0 + mn), \\ F &= x_0^2 + y_0^2 - n^2. \end{aligned}$$

Ficaremos com $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Definição 6.1. Uma cônica em \mathbb{R}^2 é um conjunto de pontos cujas as coordenadas em relação a base canônica satisfazem a equação:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde A ou B ou $C \neq 0$.

Chamaremos $Q(v) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de forma

quadrática e $L(v) = Dx + Ey = \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ de forma linear.

Quando submetemos o sistema de eixos coordenados OXY a uma rotação de um ângulo θ em torno da origem, obtemos o novo sistema $OX'Y'$. Relacionamos as antigas coordenadas (x, y) com as novas coordenadas (u, v) da seguinte forma $x = au - bv$ e $y = bu + av$, onde $a = \cos(\theta)$ e $b = \sin(\theta)$, então $a^2 + b^2 = 1$. Temos que a curva $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ poderá ser expressa como

$$A'u^2 + B'uv + C'v^2 + D'u + E'v + F = 0,$$

onde teremos que $A' = Aa^2 + Bab + Cb^2$, $B' = -2Aab + B(a^2 - b^2) + 2Cab$ e $C' = Ab^2 - Bab + Ca^2$.

Fazendo $\alpha = 2ab$ e $\beta = a^2 - b^2$, podemos rescrever $A' = Aa^2 + \frac{B}{2}\alpha + Cb^2$, $B' = -A\alpha + B\beta + C\alpha$, $C' = Ab^2 - \frac{B}{2}\alpha + Ca^2$, $D' = Da + Eb$ e $E' = (-Db + Ea)$.

Como $a = \cos(\theta)$ e $b = \sin(\theta)$, podemos rescrever as relações acima como:

$$\begin{aligned} A' &= A\cos^2(\theta) + B\sin(\theta)\cos(\theta) + C\sin^2(\theta) \\ B' &= -2A\sin(\theta)\cos(\theta) + B(\cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)) + 2C\sin(\theta)\cos(\theta) \\ C' &= A\sin^2(\theta) - B\sin(\theta)\cos(\theta) + C\cos^2(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D' &= D\cos(\theta) + E\sin(\theta) \\E' &= -D\sin(\theta) + E\cos(\theta)\end{aligned}$$

Podemos escrever os coeficientes acima como

$$\begin{aligned}A' &= A\cos^2(\theta) + \frac{B}{2}\sin(2\theta) + C\sin^2(\theta) \\B' &= (C - A)\sin(2\theta) + B\cos(2\theta) \\C' &= A\sin^2(\theta) - \frac{B}{2}\sin(2\theta) + C\cos^2(\theta) \\D' &= D\cos(\theta) + E\sin(\theta) \\E' &= -D\sin(\theta) + E\cos(\theta).\end{aligned}$$

Utilizando as fórmulas desenvolvidas, temos que $B' = 0$ se, e somente se, $B\cos(2\theta) = (A - C)\sin(2\theta)$. Sendo θ , tal que $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e $A \neq C$, por hipótese $B \neq 0$, segue-que

$$\cotg(2\theta) = \frac{A - C}{B} \Leftrightarrow \tg(2\theta) = \frac{B}{A - C}$$

Para $A \neq C$, a rotação de ângulo θ em torno de O , com $\tg(2\theta) = \frac{B}{A - C}$, introduzimos as coordenadas (u, v) nas quais a equação da curva não possui termo em uv .

Para $A = C$, temos que $\theta = 45^\circ$, onde $\sin(45^\circ) = \cos(45^\circ) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Segue que $x = \frac{u - v}{\sqrt{2}}$ e $y = \frac{u + v}{\sqrt{2}}$, como $A = C$, escreveremos

$$\begin{aligned}& Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F \\&= \frac{A}{2}(u - v)^2 + \frac{B}{2}(u^2 - v^2) + \frac{A}{2}(u + v)^2 + \frac{D}{\sqrt{2}}(u - v) + \frac{E}{\sqrt{2}}(u + v) + F \\&= \left(A + \frac{B}{2}\right)u^2 + \left(A - \frac{B}{2}\right)v^2 + \frac{D + E}{\sqrt{2}}u - \frac{D - E}{\sqrt{2}}v + F \\&= A'u^2 + C'v^2 + D'u + E'v + F.\end{aligned}$$

Observação 6.1. Temos que $A' + C' = A\cos^2(\theta) + \frac{B}{2}\sin(2\theta) + C\sin^2(\theta) + A\sin^2(\theta) - \frac{B}{2}\sin(2\theta) + C\cos^2(\theta) = (A + C)(\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)) = A + C$.

Quando submetemos o sistema de eixos OXY a uma translação, obteremos um novo sistema de coordenadas $O'X'Y'$. Onde as antigas coordenadas (x, y) se relacionam com as novas coordenadas da seguinte forma $x = u + h$ e $y = v + k$, sendo (h, k) as coordenadas de O' no antigo sistema de eixos.

6.2 CLASSIFICAÇÃO DE CÔNICAS COM $B=0$

Teorema 6.1. *Se os coeficientes A e C da equação do segundo grau*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

tem o mesmo sinal, então a equação representa um dos seguintes conjuntos:

- Uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados;

- Um ponto;
- O conjunto vazio.

Demonstração: Deixaremos a equação na forma canônica mediante reorganização e completamento de quadrados

$$\begin{aligned}
 & Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\
 \Leftrightarrow & Ax^2 + Dx + Cy^2 + Ey = -F \\
 \Leftrightarrow & A \left(x^2 + \frac{2xD}{2A} \right) + C \left(y^2 + \frac{2yE}{2C} \right) = -F \\
 \Leftrightarrow & A \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 - \frac{D^2}{4A} + C \left(y + \frac{E}{2C} \right)^2 - \frac{E^2}{4C} = -F \\
 \Leftrightarrow & A \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 + C \left(y + \frac{E}{2C} \right)^2 = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} \\
 \Leftrightarrow & A \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 + C \left(y + \frac{E}{2C} \right)^2 = \frac{AE^2 + CD^2 - 4ACF}{4AC}.
 \end{aligned}$$

Sendo $x' = x + \frac{D}{2A}$, $y' = y + \frac{E}{2C}$ e $F' = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C}$, poderemos escrever a equação na forma

$$Ax'^2 + Cy'^2 = F'.$$

Analisaremos os seguintes casos e seus respectivos sub casos.

1º) $A, C > 0$ e seus sub casos $F' > 0$, $F' = 0$ e $F' < 0$.

- Para $F' > 0$, teremos que $\frac{A}{F'}x'^2 + \frac{C}{F'}y'^2 = 1$, uma equação de uma elipse.
- Para $F' = 0$, a equação $Ax'^2 + Cy'^2 = 0$ terá somente uma solução, ou seja, um ponto.
- Para $F' < 0$, a equação $Ax'^2 + Cy'^2 = F'$ não terá solução, ou seja, a solução será o conjunto vazio.

2º) $A, C < 0$ e seus sub casos $F' > 0$, $F' = 0$ e $F' < 0$.

- Para $F' > 0$, a equação $Ax'^2 + Cy'^2 = F'$ não terá solução, ou seja, a solução será o conjunto vazio.
- Para $F' = 0$, a equação $Ax'^2 + Cy'^2 = 0$ terá somente uma solução, ou seja, um ponto.
- Para $F' < 0$, a equação $\frac{A}{F'}x'^2 + \frac{C}{F'}y'^2 = 1$, uma equação de uma elipse. ■

Observação 6.2. Quando $A = C > 0$ ($A = C < 0$) e $F' > 0$ ($F' < 0$), segue que $Ax^2 + Cy^2 = F' \Rightarrow Ax^2 + Ay^2 = F' \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{F'}{A}$, onde teremos a equação de uma circunferência.

Teorema 6.2. *Se os coeficientes A e C da equação*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

têm sinais opostos, então a equação representa um dos seguintes conjuntos:

- Uma hipérbole de eixos paralelos aos eixos coordenados;

- *Um par de retas concorrentes.*

Demonstração: Sem perda de generalidade, poderemos ter $A > 0$ e $C < 0$. Deixaremos a equação na forma canônica mediante reorganização e completamento de quadrados,

$$\begin{aligned}
 & Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \\
 \Leftrightarrow & Ax^2 + Dx + Cy^2 + Ey = -F \\
 \Leftrightarrow & A \left(x^2 + \frac{2xD}{2A} \right) + C \left(y^2 + \frac{2yE}{2C} \right) = -F \\
 \Leftrightarrow & A \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 - \frac{D^2}{4A} + C \left(y + \frac{E}{2C} \right)^2 - \frac{E^2}{4C} = -F \\
 \Leftrightarrow & A \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 + C \left(y + \frac{E}{2C} \right)^2 = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} \\
 \Leftrightarrow & A \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 + C \left(y + \frac{E}{2C} \right)^2 = \frac{AE^2 + CD^2 - 4ACF}{4AC}.
 \end{aligned}$$

Sendo $C = -C'$, onde $C' > 0$, $x' = x + \frac{D}{2A}$, $y' = y - \frac{E}{2C'}$ e $F' = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C'}$, poderemos escrever a equação na forma

$$Ax'^2 - C'y'^2 = F'.$$

Temos que para $F' = 0$, teremos um par de retas concorrentes e para $F' \neq 0$, teremos uma hipérbole. ■

Teorema 6.3. *Seja a equação do segundo grau com $B = 0$:*

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Se A ou C é igual a zero, a equação representará um dos seguintes conjuntos,

- *Uma parábola;*
- *Um par de retas paralelas;*
- *Uma reta;*
- *O conjunto vazio.*

Demonstração: Sendo $A \neq 0$ e $C = 0$, temos que a equação fica da forma:

$$Ax^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Deixaremos a equação na forma canônica mediante reorganização e completamento de quadrados,

$$\begin{aligned}
 & A \left(x^2 + \frac{2xD}{2A} \right) + Ey + F = 0 \\
 \Leftrightarrow & A \left(x^2 + \frac{2xD}{2A} + \frac{D^2}{4A^2} - \frac{D^2}{4A^2} \right) + Ey + F = 0 \\
 \Leftrightarrow & A \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 - \frac{D^2}{4A} + Ey + F = 0 \\
 \Leftrightarrow & A \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 = -Ey + \frac{D^2}{4A} - F
 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 = -\frac{E}{A} \left(y + \frac{A}{E} \left(\frac{F}{A} - \frac{D^2}{4A^2}\right)\right).$$

Temos que analisar duas possibilidades que são $E \neq 0$ e $E = 0$.

Se $E \neq 0$, temos uma parábola com vértice $V = \left(-\frac{D}{2A}, -\frac{F}{E} + \frac{D^2}{4AE}\right)$, com reta focal paralela ao eixo OY .

Se $E = 0$, temos que a equação inicial ficará $Ax^2 + Dx + F = 0$. Analisaremos o discriminante desta equação, que chamaremos $\varphi' = D^2 - 4AF$.

Se $D^2 - 4AF > 0$, a equação terá duas soluções que serão,

$$x = \frac{-D + \sqrt{D^2 - 4AF}}{2A} \text{ e } x = \frac{-D - \sqrt{D^2 - 4AF}}{2A},$$

que significa que o conjunto solução serão duas retas paralelas.

Se $D^2 - 4AF = 0$, a equação terá apenas uma solução que será,

$$x = -\frac{D}{2A},$$

que significa que o conjunto solução terá apenas uma reta.

Se $D^2 - 4AF < 0$, a equação não terá solução, logo o conjunto solução será o vazio.

Sendo $A = 0$ e $C \neq 0$, temos que a equação fica da forma:

$$Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Deixaremos a equação na forma canônica mediante reorganização e completamento de quadrados,

$$\begin{aligned} & C \left(y^2 + \frac{2yE}{2C}\right) + Dx + F = 0 \\ \Leftrightarrow & C \left(y^2 + \frac{2yE}{2C} + \frac{E^2}{4C^2} - \frac{E^2}{4C^2}\right) + Dx + F = 0 \\ \Leftrightarrow & C \left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 - \frac{E^2}{4C} + Dx + F = 0 \\ \Leftrightarrow & C \left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -Dx + \frac{E^2}{4C} - F \\ \Leftrightarrow & \left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C} \left(x + \frac{C}{D} \left(\frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Temos que analisar duas possibilidades que são $D \neq 0$ e $D = 0$.

Se $D \neq 0$, temos uma parábola com vértice $V = \left(-\frac{F}{D} + \frac{E^2}{4CD}, -\frac{E}{2C}\right)$, com reta focal paralela ao eixo OX .

Se $D = 0$, temos que a equação inicial ficará $Cy^2 + Ey + F = 0$. Analisaremos o discriminante desta equação, que chamaremos $\varphi' = E^2 - 4CF$.

Se $E^2 - 4CF > 0$, a equação terá duas soluções que serão

$$y = \frac{-E + \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C} \text{ e } y = \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C},$$

que significa que o conjunto solução serão duas retas paralelas.

Se $E^2 - 4CF = 0$, a equação terá apenas uma solução que será

$$y = -\frac{E}{2C},$$

que significa que o conjunto solução terá apenas uma reta.

Se $E^2 - 4CF < 0$, a equação não terá solução, logo o conjunto solução será o vazio.

Com o resultado obtido acima, podemos dividir essa classificação em três casos:

- $AC > 0$, Teremos a elipse ou suas degenerações;
- $AC < 0$, teremos a hipérbole ou suas degenerações;
- $AC = 0$, teremos a parábola ou suas degenerações. ■

Observação 6.3. Se $AE^2 + CD^2 - 4ACF = 0$ então $F' = 0$ onde nos casos da elipse e da hipérbole geram suas degenerações. Já no caso da parábola, sendo $A = 0$ e $D = 0$ ou $C = 0$ e $E = 0$ temos que $AE^2 + CD^2 - 4ACF = 0$, onde teremos as degenerações da parábola.

Definição 6.2. Chamaremos δ' de indicador de degenerescência da cônica $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$:

$$\delta' = AE^2 + CD^2 - 4ACF.$$

Com todas as informações adquiridas até o momento, podemos montar as Tabelas 1 e 2, como veremos a seguir.

Tabela 1 – Tabela de classificação reduzida de cônicas não-degeneradas

$\delta' \neq 0$		
$AC > 0$	↗ Sinal de δ' igual ao de A e C ↘	$A \neq C \rightarrow$ Elipse $A = C \rightarrow$ Circunferência
$AC = 0$	\rightarrow	Vazio
$AC < 0$	\rightarrow	Parábola
$AC < 0$	\rightarrow	Hipérbole

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela 2 – Tabela de classificação reduzida de cônicas degeneradas

$\delta' = 0$		
$AC > 0$	\rightarrow	Ponto
	$\varphi' > 0 \rightarrow$	Duas retas paralelas
$AC = 0$	$\rightarrow \varphi' = 0 \rightarrow$	Reta
	$\varphi' < 0 \rightarrow$	Vazio
$AC < 0$	\rightarrow	Duas retas concorrentes

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

6.3 INVARIANTE ALGEBRICO E INDICADOR DE DEGENERESCÊNCIA

Nestes próximos resultados, mostraremos que ao rotacionar ou transladar uma cônica, sua estrutura não se deforma. Para um estudo mais profundo sobre o invariante e o indicador de degenerescência aconselhamos Oliveira (2018).

Definição 6.3. Dada $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, chamamos $\Delta = B^2 - 4AC$ de invariante algébrico ou discriminante da equação.

Proposição 6.1. *O discriminante Δ é invariante por rotação em torno da origem.*

Demonstração: Sendo $B'^2 = A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\alpha^2 - 2AC\alpha^2 + 2BC\alpha\beta$ e $4A'C' = 4A^2a^2b^2 - B^2\alpha^2 + 4C^2a^2b^2 - 2ABa^2\alpha + 4ACa^4 + 2AB\alpha b^2 + 2BC\alpha\alpha^2 + 4ACb^4 - 2BCab^2$. Levando em conta que

$$2BC\alpha\alpha^2 - 2BC\alpha b^2 = 2BC\alpha\beta, 4a^2b^2 = \alpha^2 \text{ e } -2ABa^2\alpha + 2ABa^2\beta = -2AB\alpha\beta.$$

Podemos expressar

$$4A'C' = A^2\alpha^2 - B^2\alpha^2 + C^2\alpha^2 - 2AB\alpha\beta + 4AC(a^4 + b^4) + 2BC\alpha\beta.$$

Como $-2AC\alpha^2 = -8ACa^2b^2$, segue-se que:

$$\begin{aligned} B'^2 - 4A'C' &= A^2\alpha^2 + B^2\beta^2 + C^2\alpha^2 - 8ACa^2b^2 + 2BC\alpha\beta \\ &- (A^2\alpha^2 - B^2\alpha^2 + C^2\alpha^2 - 2AB\alpha\beta + 4AC(a^4 + b^4) + 2BC\alpha\beta) \\ &= B^2(\alpha^2 + \beta^2) - 4AC(a^4 + b^4 + 2a^2b^2) \\ &= B^2 - 4AC(a^2 + b^2)^2 = B^2 - 4AC. \end{aligned}$$

Proposição 6.2. *O discriminante Δ é invariante por translação.* ■

Demonstração: Fazendo a mudança de $x = u + h$ e $y = v + k$ em $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, teremos:

$$A(u + h)^2 + B(u + h).(v + k) + C(v + k)^2 + D(u + h) + E(v + k) + F = 0.$$

Logo, $Au^2 + Buv + Cv^2 + (2Ah + Bk + D)u + (2Ck + Bh + E)v + (Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F) = 0$.

Sendo $D' = 2Ah + Bk + D$, $E' = 2Ck + Bh + E$ e $F' = Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F$, reescreveremos a equação acima como:

$$Au^2 + Buv + Cv^2 + D'u + E'v + F' = 0.$$

Temos que $B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$. ■

Consideremos a cônica

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

onde $B \neq 0$, podemos transformar esta equação por rotação em

$$A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$$

sem o termo misto. Vamos rescrever A' , C' , D'^2 e E'^2 em função de A , B , C , D e E .

Pela relação fundamental da trigonometria, temos que $\operatorname{cosec}^2(2\theta) = 1 + \cotg^2(2\theta)$. Como $\cotg(2\theta) = \frac{A-C}{B}$ segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{cosec}^2(2\theta) &= 1 + \left(\frac{A-C}{B}\right)^2 \\ \frac{1}{\operatorname{sen}^2(2\theta)} &= 1 + \frac{(A-C)^2}{B^2} \\ \operatorname{sen}^2(2\theta) &= \frac{B^2}{B^2 + (A-C)^2} \\ \operatorname{sen}(2\theta) &= \frac{|B|}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}}. \end{aligned}$$

Novamente pela a relação fundamental segue que

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2(2\theta) + \operatorname{cos}^2(2\theta) &= 1 \\ \operatorname{cos}^2(2\theta) &= 1 - \frac{B^2}{B^2 + (A-C)^2} \\ \operatorname{cos}^2(2\theta) &= \frac{(A-C)^2}{B^2 + (A-C)^2} \\ \operatorname{cos}(2\theta) &= \pm \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}}. \end{aligned}$$

Vamos dividir a nossa análise em dois casos:

Se $B > 0$, temos que $\operatorname{sen}(2\theta) = \frac{B}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}}$, então

$$\begin{aligned} \operatorname{cos}(2\theta) &= \frac{A-C}{B} \operatorname{sen}(2\theta) = \frac{A-C}{B} \frac{B}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \\ \operatorname{cos}(2\theta) &= \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \end{aligned}$$

$$2\cos^2(\theta) - 1 = \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}}$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \right).$$

Pela a relação fundamental, segue-que

$$\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

$$\text{sen}^2(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \right).$$

Se $B < 0$, temos que $\text{sen}(2\theta) = \frac{-B}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}}$, então

$$\cos(2\theta) = \frac{A - C}{B} \text{sen}(2\theta) = \frac{A - C}{B} \frac{-B}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}}$$

$$\cos(2\theta) = -\frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}}$$

$$2\cos^2(\theta) - 1 = -\frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}}$$

$$\cos^2(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \right).$$

Pela a relação fundamental, segue-que

$$\text{sen}^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

$$\text{sen}^2(\theta) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \right).$$

Substituindo nas equações trigonométricas de A' , C' , D'^2 e E'^2 teremos que

$$A' = \frac{A}{2} \left(1 \pm \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \right) + \frac{B | B |}{2\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} + \frac{C}{2} \left(1 \mp \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \right)$$

$$C' = \frac{A}{2} \left(1 \mp \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \right) - \frac{B | B |}{2\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} + \frac{C}{2} \left(1 \pm \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \right)$$

$$D'^2 = \frac{D^2}{2} \left(1 \pm \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \right) + \frac{DE | B |}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} + \frac{E^2}{2} \left(1 \mp \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \right)$$

$$E'^2 = \frac{D^2}{2} \left(1 \mp \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \right) - \frac{DE | B |}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} + \frac{E^2}{2} \left(1 \pm \frac{A - C}{\sqrt{B^2 + (A - C)^2}} \right).$$

Proposição 6.3. *Seja $A'x^2 + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0$ obtida da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, então,*

$$\delta' = AE^2 + CD^2 - BDE + \Delta F.$$

Demonstração: Suponhamos que $B > 0$, segue as seguintes fórmulas.

$$\begin{aligned} A' &= \frac{A}{2} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) + \frac{B|B|}{2\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} + \frac{C}{2} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \\ C' &= \frac{A}{2} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) - \frac{B|B|}{2\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} + \frac{C}{2} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \\ D'^2 &= \frac{D^2}{2} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) + \frac{DE|B|}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} + \frac{E^2}{2} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \\ E'^2 &= \frac{D^2}{2} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) - \frac{DE|B|}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} + \frac{E^2}{2} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right). \end{aligned}$$

Logo obteremos,

$$\begin{aligned} A'E'^2 &= \frac{AD^2}{4} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) - \frac{ADEB}{2\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \\ &+ \frac{AE^2}{4} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right)^2 + \frac{B^2D^2}{4\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \\ &- \frac{DEB^3}{2(B^2 + (A-C)^2)} + \frac{B^2E^2}{4\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \\ &+ \frac{CD^2}{4} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right)^2 - \frac{CDEB}{2\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \\ &+ \frac{CE^2}{4} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} C'D'^2 &= \frac{AD^2}{4} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) + \frac{ADEB}{2\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \\ &+ \frac{AE^2}{4} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right)^2 - \frac{B^2D^2}{4\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \\ &- \frac{DEB^3}{2(B^2 - (A-C)^2)} - \frac{B^2E^2}{4\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \\ &+ \frac{CD^2}{4} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right)^2 + \frac{CDEB}{2\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \left(1 + \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right) \\ &+ \frac{CE^2}{4} \left(1 - \frac{A-C}{\sqrt{B^2 + (A-C)^2}} \right). \end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
A'E^2 + C'D'^2 &= \frac{AD^2}{2} \cdot \frac{B^2}{B^2 + (A-C)^2} - \frac{ADEB(A-C)}{B^2 + (A-C)^2} + \frac{AE^2}{2} + \frac{AE^2}{2} \cdot \frac{(A-C)^2}{B^2 + (A-C)^2} \\
&\quad - \frac{B^2D^2}{2} \cdot \frac{A-C}{B^2 + (A-C)^2} - \frac{DEB^3}{B^2 + (A-C)^2} + \frac{B^2E^2}{2} \cdot \frac{A-C}{B^2 + (A-C)^2} \\
&\quad + \frac{CD^2}{2} + \frac{CD^2}{2} \cdot \frac{(A-C)^2}{B^2 + (A-C)^2} + \frac{CDEB(A-C)}{B^2 + (A-C)^2} + \frac{CE^2}{2} \cdot \frac{B^2}{B^2 + (A-C)^2}.
\end{aligned}$$

Simplificando, obteremos

$$\begin{aligned}
A'E'^2 + C'D'^2 &= \frac{AE^2}{2} + \frac{CD^2}{2} + \frac{1}{2(B^2 + (A-C)^2)} [(AD^2B^2 - 2ADEB(A-C) \\
&\quad + AE^2(A-C)^2 - B^2D^2(A-C) - 2DEB^3 + B^2E^2(A-C) \\
&\quad + CD^2(A-C)^2 + 2CDEB(A-C) + CE^2B^2] \\
&= \frac{1}{2(B^2 + (A-C)^2)} [2DEB(A-C)(C-A) + (AE^2 + CD^2)(A-C)^2 \\
&\quad + B^2D^2C - 2DEB^3 + B^2E^2(A-C) + CE^2B^2] + \frac{AE^2}{2} + \frac{CD^2}{2} \\
&= \frac{1}{2(B^2 + (A-C)^2)} [-2DEB(A-C)^2 + (AE^2 + CD^2)(A-C)^2 \\
&\quad + B^2D^2C - 2DEB^3 + B^2E^2(A-C) + CE^2B^2] + \frac{AE^2}{2} + \frac{CD^2}{2} \\
&= \frac{1}{2(B^2 + (A-C)^2)} [-2DEB((A-C)^2 + B^2) + (AE^2 + CD^2)(A-C)^2 \\
&\quad + B^2(CD^2 + AE^2)] + \frac{AE^2}{2} + \frac{CD^2}{2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2(B^2 + (A-C)^2)} [(A-C)^2 + B^2] (-2DEB + AE^2 + CD^2) + \frac{AE^2}{2} + \frac{CD^2}{2} \\
&= AE^2 + CD^2 - BDE.
\end{aligned}$$

Como $4A'C' = \Delta$ e $F = F'$. Então,

$$\delta' = A'E'^2 + C'D'^2 - 4A'C'F' = AE^2 + CD^2 - BDE + \Delta F. \quad \blacksquare$$

Definição 6.4. O indicador de degenerescência de uma cônica é dado por $\delta = AE^2 + CD^2 - BDE + \Delta F$.

Proposição 6.4. O indicador de degenerescência é invariante por rotação.

Demonstração: Sendo

$$\begin{aligned}
A' &= Aa^2 + Bab + Cb^2, B' = -2Aab + B(a^2 - b^2) + 2Cab, \\
C' &= Ab^2 - Bab + Ca^2, D' = Da + Eb \text{ e } E' = (-Db + Ea).
\end{aligned}$$

Temos que

$$\begin{aligned}
A'E'^2 &= AD^2a^2b^2 - 2ADEa^3b + AE^2a^4 + BD^2ab^3 - BDE2a^2b^2 + BE^2a^3b + CD^2b^4 \\
&- 2CDEab^3 + CE^2a^2b^2C'D'^2 = ADa^2b^2 + 2ADEab^3 + AE^2b^4 - BD^2a^3b \\
&- 2BDEa^2b^2 - BE^2ab^3 + CD^2a^4 + 2CDEa^3b + CE^2a^2b^2. \\
B'D'E' &= -2CD^2a^2b^2 + 2AD^2a^2b^2 + 2CDEab(a^2 - b^2) - 2ADEab(a^2 - b^2) + 2CE^2a^2b^2 \\
&- 2AE^2a^2b^2 - BD^2(a^2 - b^2)ab + BDE(a^2 - b^2)^2 + BE^2(a^2 - b^2)ab.
\end{aligned}$$

Fazendo $A'E'^2 + C'D'^2$, ficamos com

$$\begin{aligned}
2AD^2a^2b^2 - 2ADEab(a^2 - b^2) + AE^2(a^4 + b^4) - BD^2ab(a^2 - b^2) - 4BDEa^2b^2 \\
+ BE^2ab(a^2 - b^2) + CD^2(a^4 + b^4) + 2CDEab(a^2 - b^2) + 2CE^2a^2b^2.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
A'E'^2 + C'D'^2 - B'D'E' &= 2AD^2a^2b^2 - 2ADEab(a^2 - b^2) + AE^2(a^4 + b^4) \\
&- BD^2ab(a^2 - b^2) - 4BDEa^2b^2 + BE^2ab(a^2 - b^2) \\
&+ CD^2(a^4 + b^4) + 2CDEab(a^2 - b^2) + 2CE^2a^2b^2 + 2CD^2a^2b^2 \\
&- 2AD^2a^2b^2 - 2CDEab(a^2 - b^2) + 2ADEab(a^2 - b^2) \\
&- 2CE^2a^2b^2 + 2AE^2a^2b^2 + BD^2(a^2 - b^2)ab - BDE(a^2 \\
&- b^2)^2 - BE^2(a^2 - b^2)ab \\
A'E'^2 + C'D'^2 - B'D'E' &= AE^2(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) + CD^2(a^4 + 2a^2b^2 + b^4) \\
&- BDE((a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2).
\end{aligned}$$

Como $a^2 + b^2 = \text{sen}^2(\theta) + \text{cos}^2(\theta) = 1$, temos que

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 = 1.$$

Então

$$A'E'^2 + C'D'^2 - B'D'E' = AE^2 + CD^2 - BDE.$$

Pelo que vimos antes, o discriminante Δ e F , são invariantes por rotação, portanto

$$A'E'^2 + C'D'^2 - B'D'E' + \Delta'F' = AE^2 + CD^2 - BDE + \Delta F. \quad \blacksquare$$

Proposição 6.5. *O indicador de degenerescência é invariante por translações.*

Demonstração: Fazendo a mudança de $x = u + h$ e $y = v + k$ em $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, teremos:

$$A(u + h)^2 + B(u + h).(v + k) + C(v + k)^2 + D(u + h) + E(v + k) + F = 0.$$

Portanto,

$$Au^2 + Buv + Cv^2 + (2Ah + Bk + D)u + (2Ck + Bh + E)v + (Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F) = 0.$$

Sendo

$$D' = 2Ah + Bk + D, E' = 2Ck + Bh + E \text{ e } F' = Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F,$$

logo rescreveremos a equação acima como:

$$Au^2 + Buv + Cv^2 + D'u + E'v + F' = 0.$$

Temos que

$$\begin{aligned} \delta' &= A(2Ck + Bh + E)^2 + C(2Ah + Bk + D)^2 - B(2Ah + Bk + D)(2Ck + Bh + E) \\ &+ (B^2 - 4AC)(Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F) = [(4AC^2k^2 + AB^2h^2 + AE^2) \\ &+ (4ABC hk + 4ACEk + 2ABEh)] + [(4CA^2h^2 + CB^2k^2 + CD^2) + (4ABC hk \\ &+ 4ACDh + 2BCDk)] - B(4AChk + 2ABh^2 + 2AEh + 2BCk^2 + B^2hk + BEk \\ &+ 2CDk + BDh + DE) + B^2(Ah^2 + Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F) - 4AC(Ah^2 \\ &+ Bhk + Ck^2 + Dh + Ek + F). \end{aligned}$$

Colocando em evidência h^2, hk, k^2, h e k e ainda o termo livre em relação a h e k , teremos

$$\begin{aligned} \delta &= (AB^2 + 4CA^2 - 2AB^2 + B^2A - 4A^2C)h^2 + (4ABC + 4ABC - 4ABC - B^3 + B^3 \\ &- 4ABC)hk + (4AC^2 + CB^2 - 2B^2C + B^2C - 4AC^2)k^2 + (2ABE + 4ACD - 2ABE \\ &- B^2D + B^2D)h + (4ACE + 2BCD - B^2E - 2BCD + B^2E - 4ACE)k + (AE^2 + CD^2 \\ &- BDE + B^2F - 4ACF = AE^2 + CD^2 - BDE + \Delta.F. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Provada a invariância do discriminante e do indicador de degenerescência, podemos fazer um processo de classificação das cônicas de uma forma mais precisa, utilizando estas duas ferramentas para a identificação de curvas não alinhadas com os eixos X e Y .

Proposição 6.6. *Sendo a $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ uma cônica, temos as classificações que seguem. Supondo que $\delta = 0$*

(i) *Se $\Delta > 0$, então a cônica é um par de retas concorrentes;*

(ii) *Se $\Delta < 0$, então a cônica é um ponto;*

(iii) *Se $\Delta = 0$, então a cônica é o vazio ou uma reta, ou um par de retas paralelas;*

Supondo que $\delta \neq 0$

(iv) *Se $\Delta > 0$, então a cônica é uma hipérbole;*

(v) *Se $\Delta < 0$, então a cônica é uma elipse ou vazio ou circunferência;*

(vi) *Se $\Delta = 0$, então a cônica é uma parábola.*

Demonstração: Segue diretamente da invariância do discriminante e do indicador de degenerescência. ■

Observação 6.4. Se $\Delta < 0$, temos $AC > 0$, onde podemos ter $A + C > 0$ (A e $C > 0$) ou $A + C < 0$ (A e $C < 0$). Ao rotacionar a cônica, teremos $A'C' > 0$, pois se tratar de uma elipse ou degenerações. Como $A + C = A' + C' > 0$, segue que A' e $C' > 0$ e no caso

$A + C = A' + C' < 0$, temos que A' e $C' < 0$.

Proposição 6.7. *A equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa uma circunferência se, e somente se $A = C$ ambos diferentes de zero, $B = 0$ e $\delta > 0$.*

Demonstração: Se $B = 0$, teremos que $\delta = D^2 + E^2 - 4AF > 0$. Como $A = C$ a equação fica da forma:

$$\begin{aligned} Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\ \Leftrightarrow A \left(x^2 + 2x \frac{D}{2A} \right) + A \left(y^2 + 2y \frac{E}{2A} \right) + F &= 0 \\ \Leftrightarrow A \left(x^2 + 2x \frac{D}{2A} + \frac{D^2}{4A^2} - \frac{D^2}{4A^2} \right) + A \left(y^2 + 2y \frac{E}{2A} + \frac{E^2}{4A^2} - \frac{E^2}{4A^2} \right) + F &= 0 \\ \Leftrightarrow A \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 + A \left(y + \frac{E}{2A} \right)^2 &= \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4A} - F \\ \Leftrightarrow \left(x + \frac{D}{2A} \right)^2 + \left(y + \frac{E}{2A} \right)^2 &= \frac{D^2 + E^2 - 4AF}{4A^2}. \end{aligned}$$

Como $D^2 + E^2 - 4AF > 0$, temos que a equação representa uma circunferência de centro $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2A}\right)$ e raio igual a $\frac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4AF}}{2A}$.

Reciprocamente, se $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ é uma circunferência, esta pode ser reduzida à equação

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

onde $r > 0$. Então temos

$$x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F.$$

Igualando os coeficientes ficamos com $A = 1$, $B = 0$, $C = 1$, $D = -2x_0$, $E = -2y_0$ e $F = x_0^2 + y_0^2 - r^2$. Assim,

$$D^2 + E^2 - 4AF = 4x_0^2 + 4y_0^2 - 4.1.(x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 4r^2 > 0, A = C \text{ e } B = 0. \quad \blacksquare$$

Parâmetro parabólico

O caso que não ficou exato foi dos parâmetros serem iguais a zero. Buscaremos agora o nosso terceiro parâmetro para construir uma tabela completa e que consiga, através dos coeficientes, diferenciar cada curva de forma única. Analisaremos a seguir o caso $\Delta = 0$, $\delta = 0$ e A e $C > 0$, onde o caso A e $C < 0$, pode ser reduzido ao caso anterior por uma equivalência de equações.

Sendo $\Delta = 0$, temos que $B^2 = 4.A.C \Rightarrow B = \pm 2\sqrt{A.C}$, onde devemos ter A e C com o mesmo sinal e diferentes de zero, pois $B \neq 0$.

Analisando $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, para $\Delta = 0$, temos que:

Se $B > 0$,

$$Ax^2 + 2\sqrt{A.C}xy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (\sqrt{Ax})^2 + 2\sqrt{A.C}xy + (\sqrt{Cy})^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\ \Rightarrow (\sqrt{Ax} + \sqrt{Cy})^2 + Dx + Ey + F &= 0. \end{aligned}$$

Se $B < 0$,

$$\begin{aligned} Ax^2 - 2\sqrt{A.C}xy + Cy^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\ \Rightarrow (\sqrt{Ax})^2 - 2\sqrt{A.C}xy + (\sqrt{Cy})^2 + Dx + Ey + F &= 0 \\ \Rightarrow (\sqrt{Ax} - \sqrt{Cy})^2 + Dx + Ey + F &= 0 \end{aligned}$$

Analisando os casos de D e E iguais a zero, temos que:

$$(\sqrt{Ax} + \sqrt{Cy})^2 + F = 0 \Rightarrow (\sqrt{Ax} + \sqrt{Cy})^2 = -F.$$

- Se $F > 0$, o conjunto é vazio.
- Se $F = 0$, o conjunto é uma reta.
- Se $F < 0$, o conjunto é par de retas paralelas.

Analisando o caso de $D \neq 0$, podemos afirmar que $E \neq 0$, pois $E = 0$, por $\delta = 0$, teríamos

$$\delta = AE^2 + CD^2 - BDE - \Delta F \Rightarrow CD^2 = 0,$$

como $C \neq 0$ teríamos $D = 0$, absurdo. Analogamente se $E \neq 0$, então $D \neq 0$.

Vamos analisar o caso de D e E diferentes de zero.

Como ambos diferentes de zero, podemos escrever estes como $D = k'\sqrt{A}$ e $E = k''\sqrt{C}$

Analisaremos dois casos

1º - Quando $k' \neq k''$, onde podemos escrever $k'' = k' + l$, logo

$$(\sqrt{Ax} + \sqrt{Cy})^2 + k'\sqrt{Ax} + k''\sqrt{Cy} + F = 0 \Rightarrow (\sqrt{Ax} + \sqrt{Cy})^2 + k'\sqrt{Ax} + k'\sqrt{Cy} + l\sqrt{Cy} + F = 0.$$

Fazendo $\sqrt{Ax} + \sqrt{Cy} = w$, ficamos

$$w^2 + k'w + l\sqrt{Cy} + F = 0,$$

onde teremos uma parábola que resultaria $\delta \neq 0$, absurdo. Temos $k' = k''$.

2º - Como $k' = k'' = k$, ficamos com

$$(\sqrt{Ax} + \sqrt{Cy})^2 + k\sqrt{Ax} + k\sqrt{Cy} + F = 0.$$

Fazendo $\sqrt{Ax} + \sqrt{Cy} = w$, ficamos com

$$w^2 + kw + F = 0,$$

onde $k = \frac{D}{\sqrt{A}} = \frac{E}{\sqrt{C}}$

Analisando o discriminante φ da equação temos que:

- Se $\varphi > 0 \Rightarrow k^2 - 4F = \frac{D^2}{A} - 4F > 0$, então teremos duas retas paralelas.
- Se $\varphi = 0 \Rightarrow k^2 - 4F = \frac{D^2}{A} - 4F = 0$, então teremos uma reta.
- Se $\varphi < 0 \Rightarrow k^2 - 4F = \frac{D^2}{A} - 4F < 0$, então teremos o conjunto vazio.

Onde podemos ter também,

- Se $\varphi > 0 \Rightarrow k^2 - 4F = \frac{E^2}{C} - 4F > 0$, então teremos duas retas paralelas.
- Se $\varphi = 0 \Rightarrow k^2 - 4F = \frac{E^2}{C} - 4F = 0$, então teremos uma reta.
- Se $\varphi < 0 \Rightarrow k^2 - 4F = \frac{E^2}{C} - 4F < 0$, então teremos o conjunto vazio.

Como este novo parâmetro φ está relacionado com os casos de degeneração da parábola, chamaremos este de Parâmetro parabólico.

Observação 6.5. Dada a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ de $\Delta = B^2 - 4AC$, $\delta = AE^2 + CD^2 - BDE + \Delta F$ e $A, C > 0$. Segue que a equação simétrica a equação dada é $-Ax^2 - Bxy - Cy^2 - Dx - Ey - F = 0$ e que terá $\Delta_s = (-B)^2 - 4(-A)(-C) = B^2 - 4AC = \Delta$, $\delta_s = (-A)(-E)^2 + (-C)(-D)^2 - (-B)(-C)(-D) + \Delta(-F) = -\delta$ e $\varphi_s = \frac{(-D)^2}{-A} - 4(-F) = -\varphi$. Logo, para a equação $-Ax^2 - Bxy - Cy^2 - Dx - Ey - F = 0$, teremos que discriminante permanece invariante por mudança de sentido. O indicador de degenerescência será simétrico, mas isso não afetará, pois os casos analisados serão de serem iguais ou diferentes de zero. O parâmetro parabólico é simétrico a φ , então teremos que o caso da duas retas paralelas acontecerá $-\varphi_s > 0 \Leftrightarrow \varphi_s < 0$ e o caso do conjunto vazio será $-\varphi_s < 0 \Leftrightarrow \varphi_s > 0$, onde $-A, -C < 0$. O argumento que acabamos de realizar completa o caso que faltava.

Provadas as invariâncias por rotação e translação do indicador de degenerescência e do discriminante e utilizando o parâmetro parabólico, podemos construir as Tabelas 3 e 4. Onde estas são aplicáveis na classificação de equações completas de cônicas.

Tabela 3 – Tabela de classificação geral de cônicas não-degeneradas

$\delta \neq 0$		
$\Delta > 0$	\rightarrow	Hipérbole
$\Delta = 0$	\rightarrow	Parábola
$A \neq C$ ou $B \neq 0 \rightarrow$ Elipse		
Sinal de δ igual ao de A e C		
$\Delta < 0$	\rightarrow	$A = C$ e $B = 0 \rightarrow$ Circunferência
Sinal de δ difere de A e C \rightarrow Vazio		

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

Tabela 4 – Tabela de classificação geral de cônicas degeneradas

$\delta = 0$			
$\Delta > 0$		\rightarrow	Ponto
		Sinal de \wp igual ao de A e C \rightarrow	Duas retas paralelas
$\Delta = 0$	\nearrow \rightarrow \searrow	$\wp = 0$	\rightarrow Reta
		Sinal de \wp difere de A e C \rightarrow	Vazio
$\Delta < 0$		\rightarrow	Duas retas concorrentes

Fonte: Elaborada pelo autor (2025).

7 CONCLUSÃO

O uso consciente da tecnologia possibilita novas visões sobre o ensino de geometria analítica. Neste trabalho, utilizamos o software dinâmico GeoGebra como um ponto de apoio para verificação de resultados, mas também como ferramenta de construção geométrica para elaboração de diversas curvas. Um dos grandes desafios sobre o GeoGebra é fazer com que o aluno consiga executar comandos básicos em pouco tempo, para tal proeza o professor deve fazer uma aula introdutória antes de utilizar na construção das cônicas.

Para a execução completa do recurso educacional gerado nesta dissertação, é necessário um laboratório de informática ou um conjunto de tablets suficientes às necessidades da turma. É importante que todos os aparelhos estejam com o software GeoGebra instalado para não depender da versão online, pois sabemos que a internet na rede pública de ensino é por muitas vezes falha. O professor que optar em aplicar o recurso deve ter conhecimentos básicos de GeoGebra para conseguir construir as curvas de forma dinâmica, mas podendo adaptar para as ferramentas de desenho geométrico caso não haja recursos tecnológicos.

Ao realizar a revisão bibliográfica, percebemos que os livros utilizados pelos alunos do ensino médio continham poucas informações sobre a classificação de cônicas por coeficientes. Estudando mais a fundo o banco de questões do ENEM, podemos entrever que questões sobre geometria analítica aparecem de forma sucinta nas provas do exame. Essa falta de cobrança na principal prova do país pode impactar na importância dada pelos professores ao formularem seus planos anuais e, com isso, abalar o ensino de geometria analítica no ensino brasileiro.

Alguns dos principais resultados foram retirados de livros com mais de 50 anos como por exemplo Zózimo (1969) e Efimov (1972) que já se encontram fora de publicação. Podemos perceber que a literatura matemática passa por desuso de obras importantes e foram esquecidas por falta de um olhar mais atento da comunidade matemática brasileira. As editoras poderiam publicar obras antigas que foram grandes clássicos nos seus tempos para uma melhor divulgação e resgate da literatura.

O nosso trabalho trouxe a proposta de mesclar a geometria elementar e a analítica para dar um maior entendimento aos resultados sobre cônicas. Os resultados obtidos são de certa forma compreensíveis aos alunos do ensino médio, pois utilizam poucas ferramentas de matemática universitária e também se resumem ao cálculo de expressões aritméticas que fornecem informações sobre as curvas estudadas.

Assim, o nosso trabalho tem a proposta de mostrar, de forma sucinta, o surgimento das cônicas e de como a forma de ver foi mudando ao longo do tempo. As definições mais precisas e propriedades geométricas foram outro foco do nosso trabalho, onde dedi-

camos um capítulo individual para cada cônica estudada. A introdução do indicador de degenerescência na classificação de cônicas foi um ponto crucial na construção da nossa tabela, pois conseguimos distinguir de forma mais precisa cada curva. A comprovação da invariância do discriminante e do indicador de degenerescência facilitou a identificação de cada curva, sem utilizar a rotação e completamento de quadrados, onde podemos analisar apenas os coeficientes da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ para um estudo classificatório completo.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO FILHO, Manoel Ferreira de. **Geometria Analítica e Álgebra linear**. Fortaleza: LIVRO TÉCNICO, 2013.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. São Paulo: BLUCHER, 1974.

DELGADO, Jorge; FRENSEL, Katia; CRISSAFF, Lhaylla. **Geometria Analítica**. Rio de Janeiro: SBM, 2017.

DREAMSTIME. **Ilustração elíptica da engrenagem**, 2025. Disponível em: <https://pt.dreamstime.com/ilustra%C3%A7%C3%A3o-el%C3%ADptica-da-engrenagem-image132025208>. Acesso em: 22 jun. 2025.

EFIMOV, Nikolai. **Elementos de geometria analítica**. Moscou: MIR, 1972.

LIMA, Elon Lages. **Coordenadas no plano**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2002.

MARTINS., Alejandra. **Órbita hiperbólica**, 2019. Disponível em: <https://www.bbc.com/portuguese/geral-49754710>. Acesso em: 22 jun. 2025.

MONTEIRO, Rubens Marinho. **Resgate do teorema de Dandelin no estudo de cônicas com o Geogebra**. 2014.

OLIVEIRA, Marcelo Rufino de. **Elementos da matemática V.4 Números complexos, polinômios e geometria analítica**. Belém: VESTSELLER, 2013.

OLIVEIRA, Oswaldo Rio Branco de. **Cônicas (Propriedades de reflexão)**. São Paulo: Instituto Militar de Engenharia, 2018.

RNews. **Prazo para substituir antena parabólica tradicional pela digital termina em agosto**, 2024. Disponível em: <https://rnews.com.br/prazo-para-substituir-antena-parabolica-tradicional-pela-digital-termina-em-agosto/>. Acesso em: 22 jun. 2025.

ROQUE, Tatiana. **Historia da Matematica - Uma visao critica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: ZAHAR, 2012.

TERRITÓRIO SECRETO. **Cozimento solar, a maneira ecológica de cozinhar com o sol**, 2025. Disponível em: <https://territoriosecreto.com.br/cozimento-solar-a-maneira-ecologica-de-cozinhar-com-o-sol/>. Acesso em: 22 jun. 2025.

TORRETELLI. **Tipos de Torres de Resfriamento**, 2025. Disponível em:

<https://torretelli.com.br/tipos-de-torres-de-resfriamento/>. Acesso em: 22 jun. 2025.

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL. **Problemas de Aplicação – Módulo 6: Geometria e Trigonometria**, 2014. Disponível em: https://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri2014/modulo6/prob_aplicas1.html. Acesso em: 22 jun. 2025.

ZÓZIMO, Menna Gonçalves. **Curso de geometria analítica com tratamento vetorial**. Rio de Janeiro: CIENTÍFICA, 1969.

ÁVILA, Geraldo Severo de Sousa. **Cálculo II: diferencial e integral**. Brasília: Universidade de Brasília, 1978.